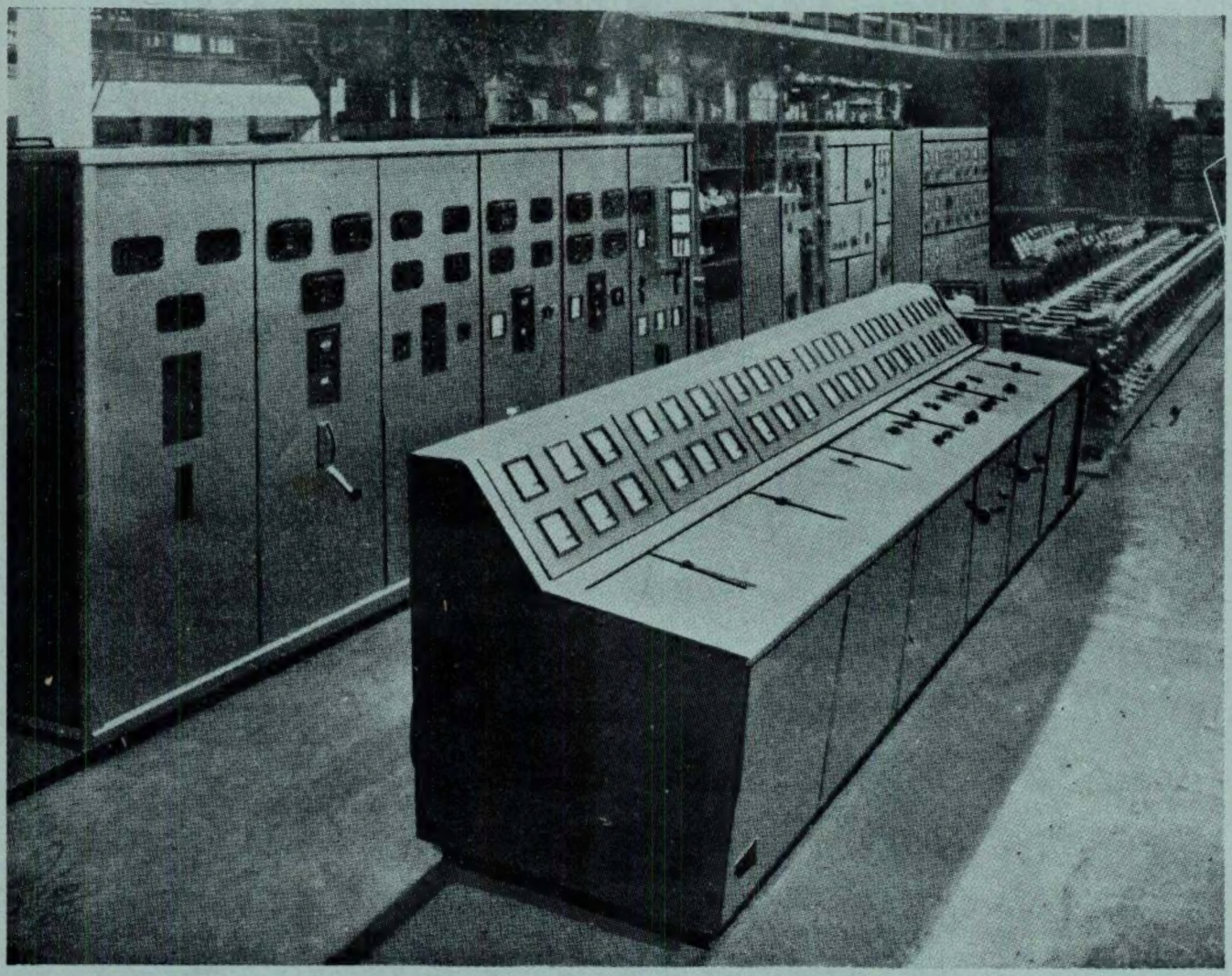
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

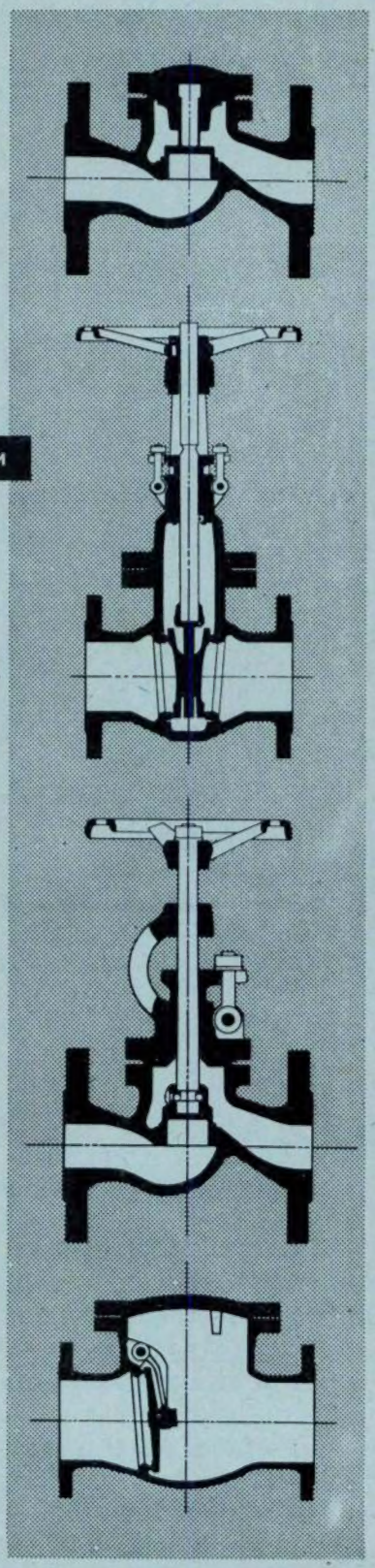


Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

válvulas

- passagem
- retenção
- regulação
- cunha



PARA LÍQUIDOS, VAPORES E GASES (INCLUINDO NH_3 E SO_2) EM

ferro fundido
ferro fundido com grafite esferoidal
aço vasado
aço inoxidável

DN 10 mm até 600 mm **PN 6 a 40 kg/cm²**

conforme as normas **DIN** e **ASA**

VÁLVULAS DE SEGURANÇA, DE REDUÇÃO, ELECTROMAGNÉTICAS E VÁLVULAS ESPECIAIS

- estudos
- projectos
- orçamentos
- assistência técnica

FENAL

SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, LDA.

SEDE: Rua Academia das Ciências, 5 - Telef. 32 00 11 (8 linhas) - Lisboa

FILIAL: Praça D. João I, 5-2º - Telef. 2 47 71 - Porto

C. D. U. 534.44 : 534.781

ESPECTRO E DISTRIBUIÇÃO DA FALA (*)

por F. E. REBELO SIMÕES (1)
E. L. CABRAL DA FONSECA (2)
J. ANTÓNIO DE MELLO (2)

Centro de Estudos de Electrónica da Comissão de Estudos de Energia Nuclear do Instituto de Alta Cultura

RESUMO

Apresentam-se alguns resultados experimentais sobre o espectro de potência e a distribuição de amplitude da fala. As experiências foram realizadas com registos em fita magnética de voz humana (uma voz e várias vozes simultâneas). Estas experiências destinam-se a analisar o comportamento da fala como processo estocástico, no que diz respeito à validade de um modelo gaussiano estacionário, para efeitos de extracção de sinais no meio do ruído.

SUMMARY

Some experimental results are presented on power spectrum and amplitude distribution of speech.

The experiments were carried out with magnetic tape records of human voice (one voice and several simultaneous voices).

These experiments are intended to analyse the behaviour of speech as a stochastic process, as far as concerns the validity of a stationary gaussian model for signal extraction purposes.

1. INTRODUÇÃO

O presente artigo constitui uma condensação de trabalho experimental em curso no Grupo de Teoria da Informação e Análise de Sinais do Centro de Estudos de Electrónica. Estas experiências, que visam o estudo do modelo estocástico da fala, foram sugeridas por trabalho anterior sobre extracção de sinais no meio de ruído.

É sabido (Wiener) que a filtragem linear de processos estocásticos é óptima, segundo o critério de aproximação pelo valor quadrático médio, para os processos gaussianos. Para processos não gaussianos haverá que considerar outras transformações (não lineares), dum modo geral de análise complexa e cálculo laborioso.

O uso do método linear para estes processos conduzirá possìvelmente a resultados subóptimos. Dada a exequibilidade da filtragem linear, poderá pôr-se então um problema de decisão, cuja resolução dependerá entre outros factores, do conhecimento do grau de afastamento do processo em causa em relação ao modelo gaussiano. É o caso da fala, de cuja filtragem linear nos temos vindo a ocupar recentemente.

A fala, como processo estocástico, tem sido estudada por vários investigadores, quer no que respeita a sua distribuição energética no domínio da frequência, quer no que respeita várias distribuições probabilísticas de amplitude.

O trabalho experimental que aqui se relata refere-se exclusivamente à evolução de algumas características (estatísticas) da fala com o número de locutores

Assim foram feitos apenas 2 tipos de análise experimental :

a) Determinação do espectro de potência de 1 voz e de várias vozes simultâneas (2 a 7).

b) Determinação da distribuição de amplitude instantânea da fala, nas condições anteriores.

---

* Comunicação apresentada ao I Simpósio de Telecomunicações organizado pela Standard Eléctrica, em Lisboa, Abril de 1967. Parte do equipamento utilizado neste trabalho foi subsidiado pela OTAN.

(1) Assistente do C. E. E. Assistente do I. S. T.
(2) Bolseiro do C. E. E. Aluno finalista do I. S. T.

2. RECOLHA DE DADOS

Como o equipamento de que dispomos não permite uma análise multicanal, foi necessário proceder ao registo magnético dos sinais a estudar.

Os registos foram feitos no Laboratório, não se tendo utilizado câmara anecóica. O ruído ambiente era o normal, apenas se tendo tomado a precaução de evitar interferências de vozes.

Os sinais registados foram obtidos por leitura ao microfone de trechos em português por diversos locutores (homens), tendo-se feito 2 tipos de registos:

1a. Uma voz isolada.

1b. Duas e três vozes simultâneas lendo trechos diferentes a um mesmo microfone (BK 4131), com níveis de voz e ritmos de leitura sensìvelmente iguais.

Os sinais a analisar finalmente foram obtidos por diversas misturas dos vários registos.

O registador utilizado foi um registador magnético Ampex SP 300 de 4 canais, nos quais foram feitos os seguintes registos:

Canal 1 — A
Canal 2 — B
Canal 3 — CD (C e D simultâneos)
Canal 4 — EFG (E, F e G simultâneos)

em que A, B . . . G representam os 7 indivíduos utilizados, cada um dos quais leu um trecho diferente.

As combinações a analisar foram:

$$A, B, CD, EFG, A + B + CD, A + B + CD + EFG,$$

tendo-se feito as misturas (adições) de forma a obter-se sensìvelmente um mesmo nível por voz.

3. ANÁLISE ESPECTRAL

Os sinais foram analisados por meio dum analisador de $^1/_3$ oitava (Brüel & Kjaer 2111) e dum registador mecânico de valor quadrático médio (Brüel & Kjaer 2305) (Fig. 1).

Foram feitos dois tipos de determinações, na banda 63 — 5000 c/s:

No 1.º tipo o sinal foi filtrado por cada um dos 20 filtros de 1/3 de oitava, utilizando-se sempre todo um mesmo registo para cada filtro, e o valor quadrático médio do sinal filtrado foi registado em função do tempo.

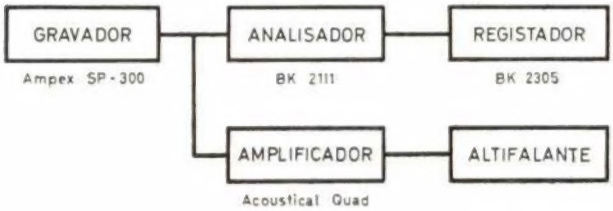


Fig. 1

Esquema de bloco do dispositivo de análise espectral

No 2.º tipo o sinal foi passando ao longo do tempo por todos os filtros, tendo-se repetido várias vezes esta operação com desfasagens sucessivas de alguns segundos, e feito a sobreposição dos registos gráficos obtidos.

3.1 Resultados experimentais

Os registos de valor quadrático médio dos vários sinais, para toda a banda (Fig. 2) e por filtro (Fig. 3) mostram como a estacionaridade do processo vocal ao longo do tempo aumenta com o número de vozes. Esta estacionaridade deve ser entendida da seguinte maneira: A fala é um processo complexo susceptível de admitir vários modelos. Um modelo simples revela-nos três aspectos principais: as vogais, que contêm a maior parcela de energia e que nos apresentam as maiores amplitudes instantâneas e uma certa característica de periodicidade; as consoantes fricativas, que se situam na região das menores amplitudes e que fornecem a característica aleatória de ruído; e finalmente as pausas, que introduzem zonas em branco no sinal.

Estes aspectos reflectem-se em contínuas variações do nível da fala, incluindo abaixamentos muito pronunciados ocorrendo a espaços mais ou menos regulares e correspondentes às pausas. Estas variações são muito salientes no caso de uma única voz, mas vão-se atenuando à medida que o número de vozes aumenta.

Os registos das Figs. 2 e 3 foram feitos para diferentes velocidades de escrita, a cada uma das quais corresponde um «tempo de rectificação» determinado. Este «tempo de rectificação» é definido por Broch e Wahrman [1] como o período de amostragem que conduziria ao mesmo valor das flutuações que se verificam no nível (valor

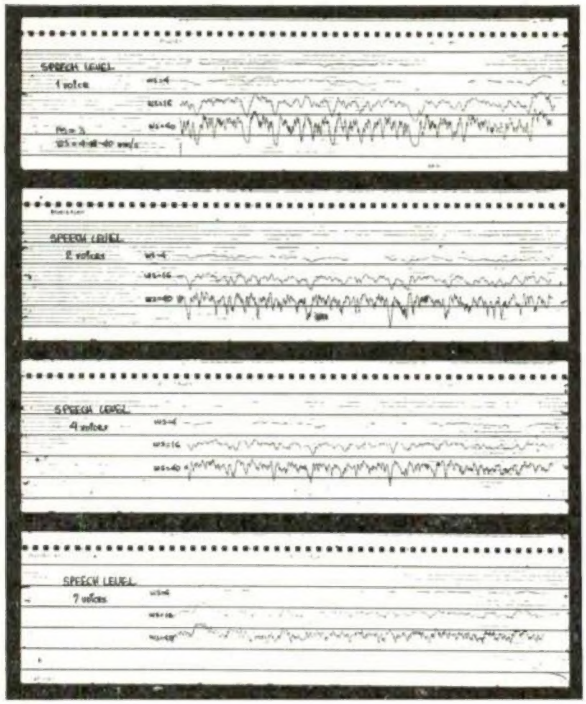


Fig. 2

Registo gráfico do nível (tensão quadrática média) da fala em função do tempo, obtido com o registador B & K 2305. Escala vertical logarítmica (10 db entre traços grossos). Velocidade do papel: 3 mm/s. Velocidade de escrita: 4-16-40 mm/s.
De cima para baixo: 1 voz (A), 2 vozes simultâneas (CD), 4 vozes simultâneas (ABCD), 7 vozes simultâneas (ABCDEFG).

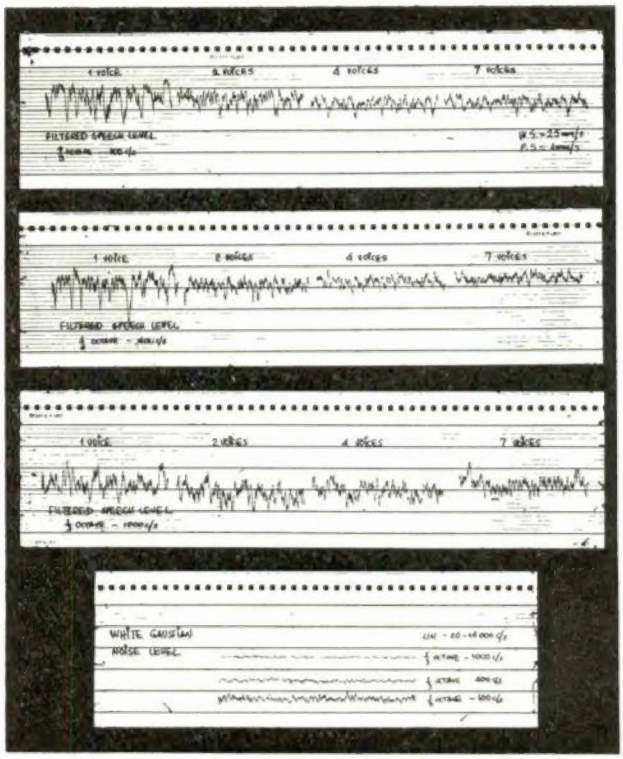


Fig. 3

Registo gráfico do nível da fala (filtrada) e do ruído branco gaussiano (filtrado e em banda larga) em função do tempo. Registos da fala para 1, 2, 4 e 7 vozes como na Fig. 2. Velocidade do papel: 1 mm/s. Velocidade de escrita: 25 mm/s.
De cima para baixo: Fala filtrada por um filtro de 1/3 de oitava centrado em 100 c/s, idem 400 c/s, idem 1000 c/s, ruído (mesmos filtros e banda 20 – 40 000 c/s.

quadrático médio) medido. Para as velocidades de escrita utilizadas, 4 — 16 — 25 — 40 mm/s, os construtores indicam «tempos de rectificação» respectivamente de 1,5—0,3—0,25—0,15 seg.

Por outro lado, para ruído gaussiano de banda B e nível v^2_{ef}, as flutuações do nível medido devidas a um tempo de amostragem T são dadas [1] por $\sigma = v^2_{ef} / \sqrt{BT}$.

Estas relações facilitam a interpretação das Figs. 2 e 3.

Assim, notam-se as crescentes flutuações dos diversos sinais, quando se aumenta a velocidade de escrita ou quando se diminui a banda (a largura dos filtros é proporcional à frequência central) mesmo no caso não gaussiano da fala.

Por outro lado os «tempos de rectificação» usados são em geral pequenos relativamente à duração média das pausas, principalmente nos casos de 1 e 2 vozes, e em particular para as maiores velocidades de escrita.

A inclusão dum registo de ruído branco gaussiano (Fig. 3) permite uma melhor apreciação da evolução das características com o número de vozes.

As Figs. 4/8 mostram os resultados completos das determinações espectrais das várias combinações de vozes. Foi adoptada uma velocidade de escrita (8 mm/s $<>$ T = 0,75 s) que permitisse uma avaliação fácil do nível médio ao longo do registo.

Nota-se para todas as bandas a gradual diminuição das flutuações, já referida, de 1 até 7 vozes.

Para obter uma estimativa do espectro de potência a partir dos registos anteriores determinaram-se os valores médios em cada banda (em db) aos quais se subtrairam n_0, $n_0 + 1$, $n_0 + 2$ ..., etc. ... db respectivamente, por or-

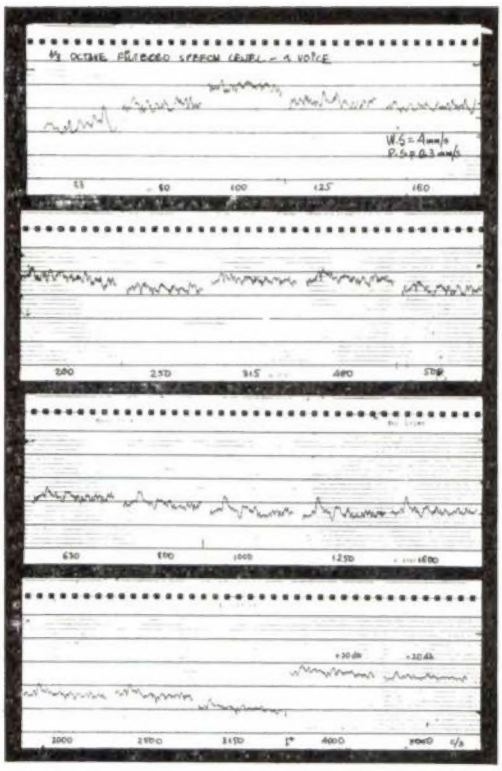


Fig. 4

Registo gráfico do nível da fala de um indivíduo (B), filtrada por filtros de 1/3 de oitava, desde 63 c/s até 5000 c/s. Escala decibel (10 db entre traços grossos) Velocidade do papel: 0,3 mm/s. Duração do registo: 100 seg. Velocidade de escrita: 4 mm/s.

Fig. 5

O mesmo que a Fig. 4, para 2 vozes simultâneas (CD). Mesmas condições de registo.

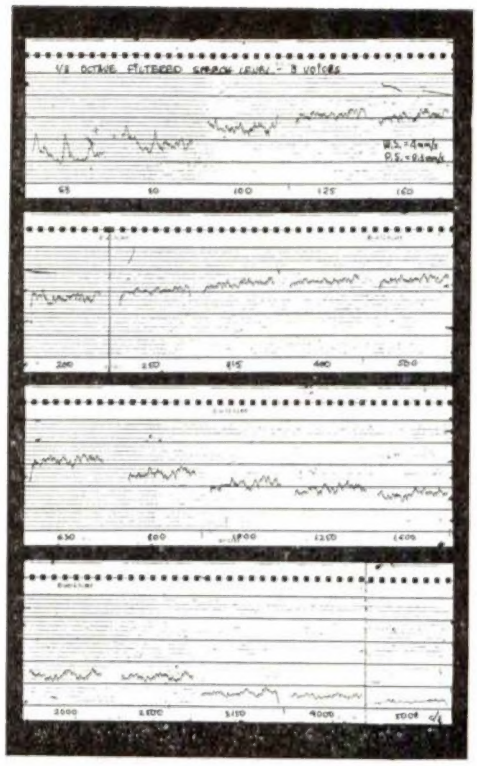


Fig. 6

O mesmo que a Fig. 4, para 3 vozes simultâneas (EFG) Mesmas condições de registo.

Fig 7

O mesmo que a Fig. 4, para 4 vozes simultâneas (ABCD). Mesmas condições de registo.

Fig. 8

O mesmo que a Fig. 4, para 7 vozes simultâneas (ABCDEFG). Mesmas condições de registo.

dem crescente de frequência, sendo n_0 um inteiro arbitrário.

Na realidade tem-se para nível do sinal x(t)

$$v^2_{ef} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} x^2 \, dt.$$

Esta expressão, para processos ergódicos estacionários, [2] pode obter-se do espectro de potência W (f) :

$$v^2_{ef} = \int_B W(f) \, df$$

em que B é a banda do sinal.

Por um lado o período de observação T é finito, definindo-se como atrás se disse um «tempo de rectificação» equivalente em função das flutuações verificadas. Por outro lado a banda de cada filtro é aproximadamente proporcional à frequência central, isto é, B = kF, tendo-se por construção que estes filtros de 1/3 de oitava estão centrados nas frequências cujos logaritmos decimais são múltiplos inteiros de 0,1 (de forma a duplicar F de 3 em 3 filtros). Nestas condições a estimativa do espectro de potência, definido com a resolução [3] de 1/3 de oitava, poderá obter-se de

$$v^2_{ef} = \int W(f) \, df \simeq W(f) B \simeq W(f) \, . \, F \, . \, C^{te}$$

Aplicando logaritmos decimais (escala db, com referência arbitrária) e atendendo a que $\log_{10} F_n = 0{,}1 \, n + C^{te}$ (inteira), vem para o filtro de ordem n

$$W(F_n) = (v^2_{ef} - n + C^{te}) \text{ db}$$

Os resultados destas estimativas estão representados na Fig. 9.

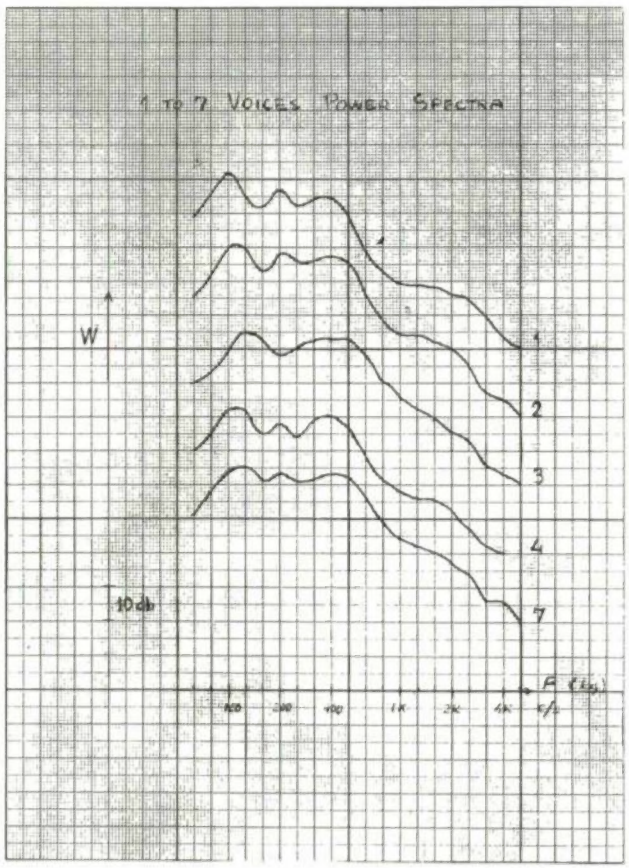


Fig. 9

Espectros de potência (escalas logarítmicas) obtidos a partir das Figs. 4/8.

Para os ensaios do tipo 2 referido atrás foram feitas determinações de 4 seg/filtro, tendo-se

feito 8 sobreposições decaladas entre si de 9 seg, para todos os registos (Fig. 10).

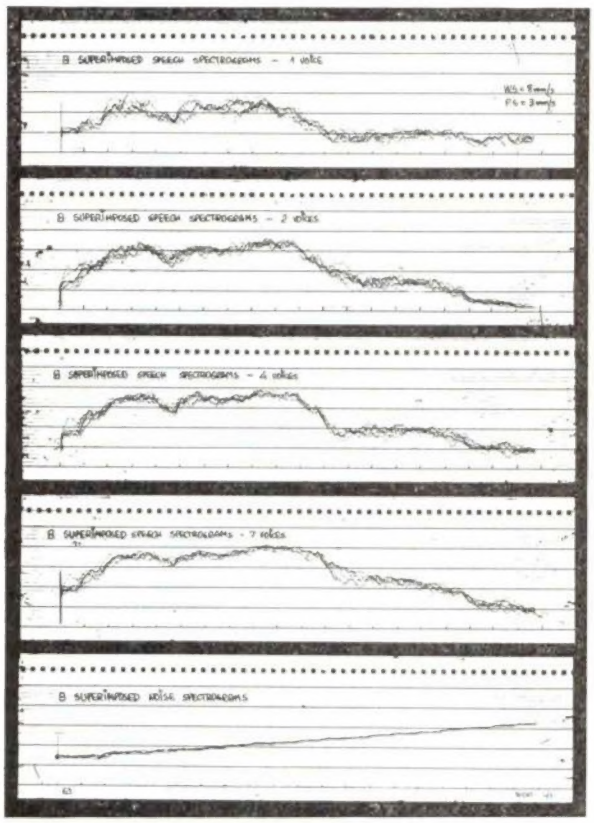


Fig. 10

Espectrogramas sobrepostos por repetição desfasada de registos. Banda de 63 c/s a 5 Kc/s (20 filtros de largura crescente. Tempo por filtro: 4 seg. Desfasagem: 9 seg. Velocidade do papel: 3 mm/s. Velocidade de escrita: 8 mm/s. De cima para baixo: 1 voz (A), 2 vozes simultâneas (CD), 4 vozes simultâneas (ABCD), 7 vozes simultâneas (ABCDEFG), ruído branco gaussiano.

A fim de poder ocupar uma maior extensão de registo gráfico no papel do registador houve que recorrer a um processo manual (o processo automático conduziria a 5 mm de registo por filtro).

Por este motivo são de assinalar alguns desvios na origem dos vários traçados.

Apesar do pequeno número de sobreposições é notório o crescente acordo dos registos sobrepostos com o número de locutores, nomeadamente nas zonas de espectro mais plano, em que os erros resultantes da operação manual são de menor consequência.

Para efeitos de comparação e para se poder descontar os referidos erros de manobra, foi determinado o espectro de sobreposição de ruído branco gaussiano, que aqui aparece sensìvelmente como uma recta de coeficiente angular igual a 3db por oitava. Esta mesma recta, proveniente da largura crescente dos filtros, deverá ser subtraída a todos os registos a fim de se obter uma estimativa do espectro de potência, como já vimos.

4. ANÁLISE DE AMPLITUDE

Os sinais foram analisados por um equipamento consistindo essencialmente numa unidade de amostragem construída no laboratório (*) e num analisador de impulsos (Fig. 11).

Foram feitas determinações de distribuição de amplitude $P(x > X)$ com o analisador funcionando como discriminador. Os sinais a analisar foram os mesmos utilizados na análise espectral.

Os impulsos de amostragem tinham a duração de 1μ seg e o seu período de repetição era de 20μ seg ($f_r = 50$ kc/s).

Em virtude das limitações do equipamento (unicanal) e a fim de não demorar demasiado as medições foram feitas apenas 5 ou 10 contagens de 10 seg por cada ponto, o que mesmo assim equivale a 2.500.000 e 5.000.000 de amostras por ponto. Deste facto resultou para alguns pontos

(*) Pelo eng. Onofe Moreira.

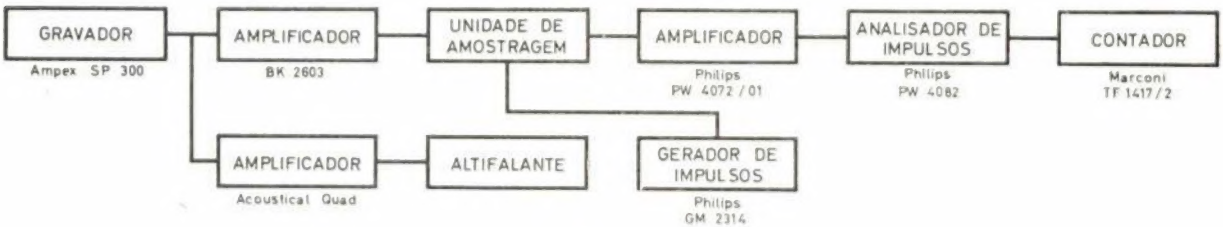


Fig. 11

Esquema de bloco do dispositivo de análise de distribuição de amplitude

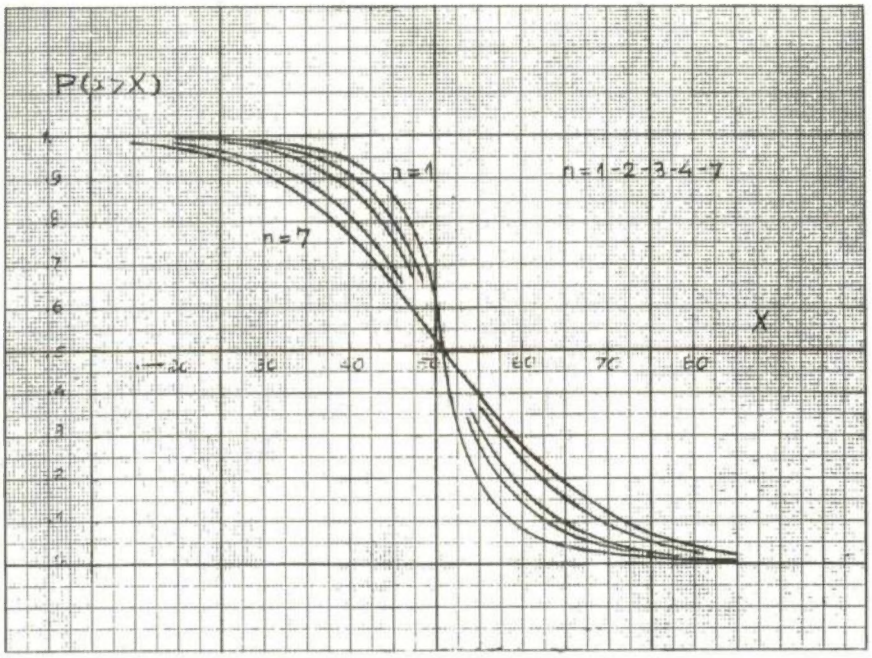


Fig. 12

Distribuição de amplitude instantânea da fala (1, 2, 3, 4, 7 vozes). Escalas lineares

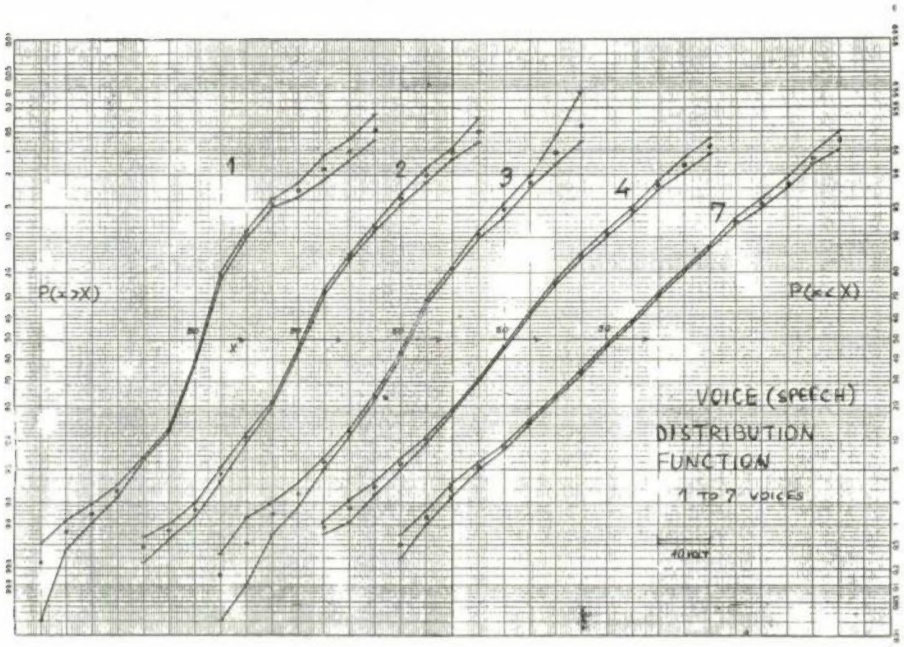


Fig. 13

Distribuição de amplitude instantânea da fala (1, 2, 3, 4, 7 vozes). Escala de X: linear (arbitrária). Escala de P: gaussiana integral. Valores médios (pontos) e variâncias das amostras parciais (linhas)

uma variância relativa um tanto elevada, sobretudo na região das pequenas amplitudes.

4.1 Resultados experimentais

Os resultados das medidas estão representados na Fig. 12. Vemos que as distribuições são sensìvelmente simétricas e se escalonam desde n = 1 até n = 7. As zonas das grandes amplitudes (P ≃ O e P ≃ 1) não são porém evidenciadas nesta escala linear.

Para esse efeito há que usar outras escalas.

A Fig. 13 mostra as distribuições das várias combinações de vozes, numa representação em que se usou «papel gaussiano», isto é, utilizando

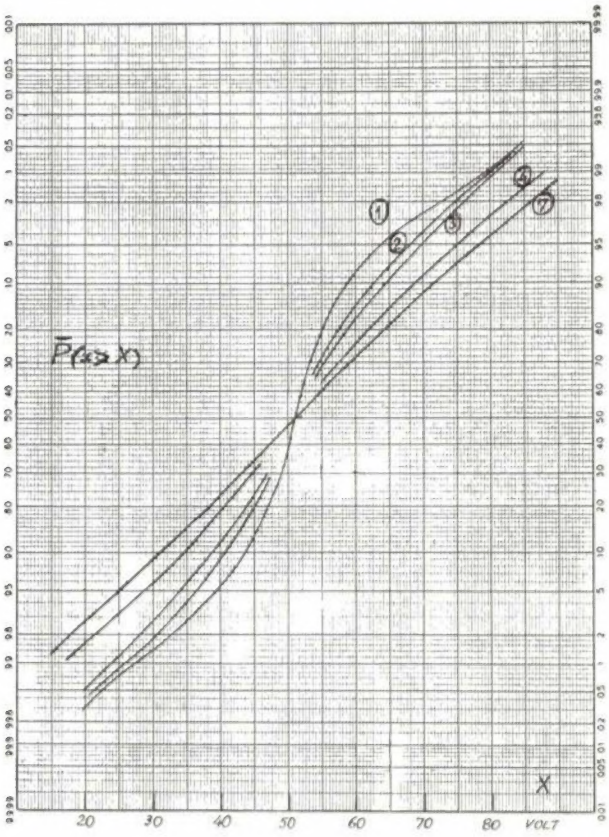


Fig. 14

Curvas obtidas com os valores médios da Fig. 13

uma escala de probabilidade linear na função erro (proporcional a $\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\,dx$).

Nesta figura estão marcados os valores médios correspondentes aos períodos de 50 (ou de 100) seg, bem como as variâncias das médias parciais correspondentes aos intervalos de 10 seg.

Alguns factos saltam à vista:

1.º A zona média (pequenas amplitudes) parece ser, com apreciável garantia, sensìvelmente linear, o que dada a escala utilizada, equivale a dizer que na zona central a distribuição parece ser gaussiana.

2.º As zonas extremas (maiores amplitudes) apresentam variâncias muito acentuadas nesta escala.

3.º À medida que se caminha de n = 1 para n = 7 verifica-se uma diminuição das flutuações, quer para um mesmo valor de X, quer para um mesmo valor de P. Este facto é mais acentuado desde n = 3 até n = 7, porque nas zonas de maior flutuação se usaram mais pontos nas curvas n = 1 e n = 2. Para todas as curvas se nota, no entanto, um aumento gradual da zona rectilínea central.

A fim de melhor se estudar esta evolução e comparar as diversas características fez-se uma sobreposição das várias curvas médias (Fig. 14). Nota-se que estas curvas se cruzam no ponto P = 0,50, X = 52 volt (nível dos impulsos de amostragem na ausência de sinal modulador). Também se deve notar a proximidade das curvas «2» e «3»; isto resultou de o nível da voz dum dos elementos EFG ser um pouco inferior durante a respectiva gravação simultânea.

É visível que a distinção entre as zonas média e extremas se vai atenuando ràpidamente, sendo já pouco notável para n = 7. Esta característica já é quase rectilínea, o que é indicador da vizinhança da distribuição normal.

Este resultado não é mais do que um aspecto do Teorema do Limite Central, [4], que, sumàriamente, afirma que dentro de largas condições uma sobreposição de distribuições independentes tende assintòticamente para a distribuição normal.

Finalmente a Fig. 15 apresenta aa mesmas funções anteriores (n = 1 e n = 7, usando outra escala — a logarítmica — A finalidade desta representação foi procurar evidenciar o carácter exponencial das zonas das grandes amplitudes da voz isolada [5].

As condições em que os ensaios foram realizados não permitiram que estes pontos fossem determinados com a precisão que seria necessária para este objectivo. No entanto os resultados são perfeitamente compatíveis com a existência duma zona rectilínea nesta representação,

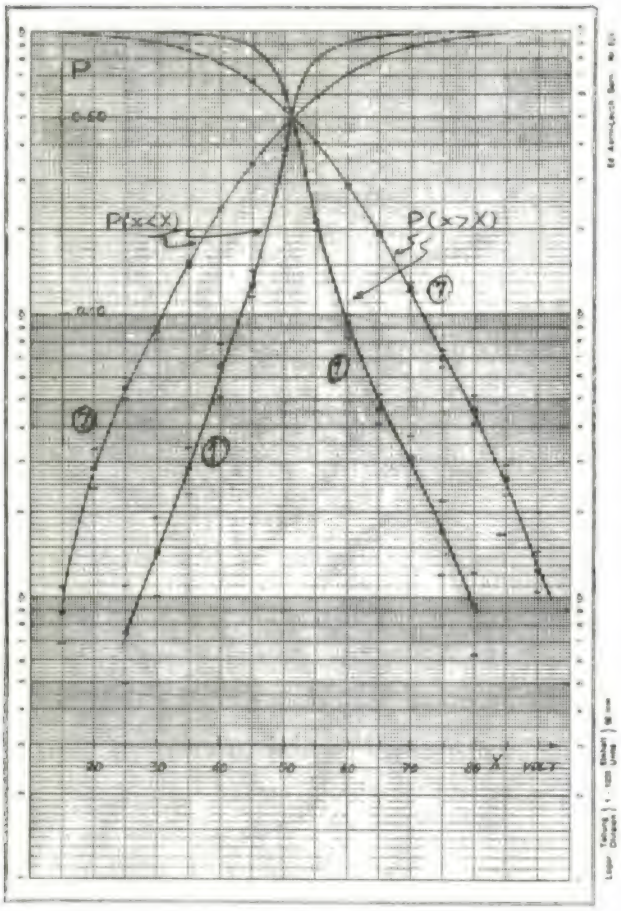


Fig. 15

Distribuição de amplitude instantânea da fala (1 e 7 vozes). Escala de X: linear. Escala de P: logarítmica

indicativa da presença da exponencial na densidade de probabilidade.

De qualquer forma é evidente, também aqui, a existência duma zona intermédia de transição (inflexão das curvas).

Deve notar-se que o modo como foram efectuadas todas as gravações deu lugar certamente a inevitáveis ecos, que foram preencher em parte as regiões de pequena amplitude do sinal, atenuando assim a transição entre as duas zonas já referidas das curvas.

CONCLUSÕES

Determinaram-se experimentalmente espectros de potência e distribuições de amplitude instantânea da fala, para uma voz e para várias vozes simultâneas.

Foi verificado que as flutuações estatísticas daquelas determinações diminuem quando o número de vozes aumenta, e que a distribuição de amplitude converge ràpidamente para a distribuição normal.

REFERÊNCIAS

[1] — Broch & Wahrman — Averaging time of level recorders — *B&K Technical Review*, n.º 1 (1961).

[2] — Davenport & Root — Random signals and noise — Mc Graw Hill — 1958.

[3] — Blackman & Tukey — Measurement of power spectra — Dover, 1958.

[4] — Cramér — Mathematical methods of statistics — Princeton — 1946.

[5] — Davenport — An experimental study of speech-wave probability distributions — *J. A. S. A.* vol. 24, n.º 4, pp390 (1952).

NOTICIÁRIO

Colóquio Rilem sobre a evolução de máquinas de ensaios mecânicos de materiais de construção

Este Colóquio terá lugar em Stuttgart, de 25 a 30 de Março de 1968.

Do programa fazem parte os seguintes temas:

1 — As máquinas de ensaio, aspectos gerais;
2 — Máquinas e aparelhagem de ensaio para materiais de construção;
3 — Máquinas e instalações de ensaio para elementos de construção;
4 — Instalações para ensaios especiais.

As línguas oficiais serão o alemão, o francês e o inglês.

As pessoas que desejarem apresentar comunicações deverão enviar um resumo até 31 de Agosto de 1967, e o têxto completo até 1 de Novembro de 1967 ao respectivo Secretariado.

As inscrições provisória e definitiva deverão ser enviadas, respectivamente, até 31 de Julho e 1 de Dezembro de 1967.

Qualquer informação deverá ser pedida a: RILEM — SYMPOSIUM Forschungs — und Materialprufungsanstalt für das Bauwesen/Robert — — Leicht — Strasse 209/700 Stuttgart/Vaihingen/ /Alemanha.

V Exposição Internacional de Máquinas para a indústria têxtil — ITMA 67

Esta exposição terá lugar em Basileia de 27 de Setembro a 6 de Outubro de 1967. Sendo uma das maiores exposições internacionais de carácter profissional, ocupará na cidade renana das feiras uma área de 72 000 m².

O programa da exposição engloba em 14 grupos diversos ramos da indústria têxtil.

Recomenda-se aos interessados que se dirijam ao Serviço de Visitantes ITMA (CH — 4000 — — Basileia 21) a fim de obter o respectivo Cartão de Visitante ("Badge"), pessoal, que servirá de livre trânsito durante todo o período da exposição e facilita o contacto entre expositores e visitantes.

Quaisquer consultas sobre alojamento podem ser dirijidas ao serviço respectivo (CH — 4000, Basileia 21).

Conferência Internacional dos Metais em Pó

A 3.ª Conferência Internacional de Metais em Pó, terá lugar no Waldorf — Astória, Nova Iorque, de 12 a 15 de Julho de 1968. As duas primeiras Conferências tiveram lugar também em Nova Iorque em 1960 e 1965.

A Conferência será participada, entre outros, pelo American Powder Metallurgy Institute e pela Metal Powder Industries Federation.

Durante a Conferência realizar-se-á, também no Waldorf — Astória uma exposição das últimas realizações da indústria dos metais em pó.

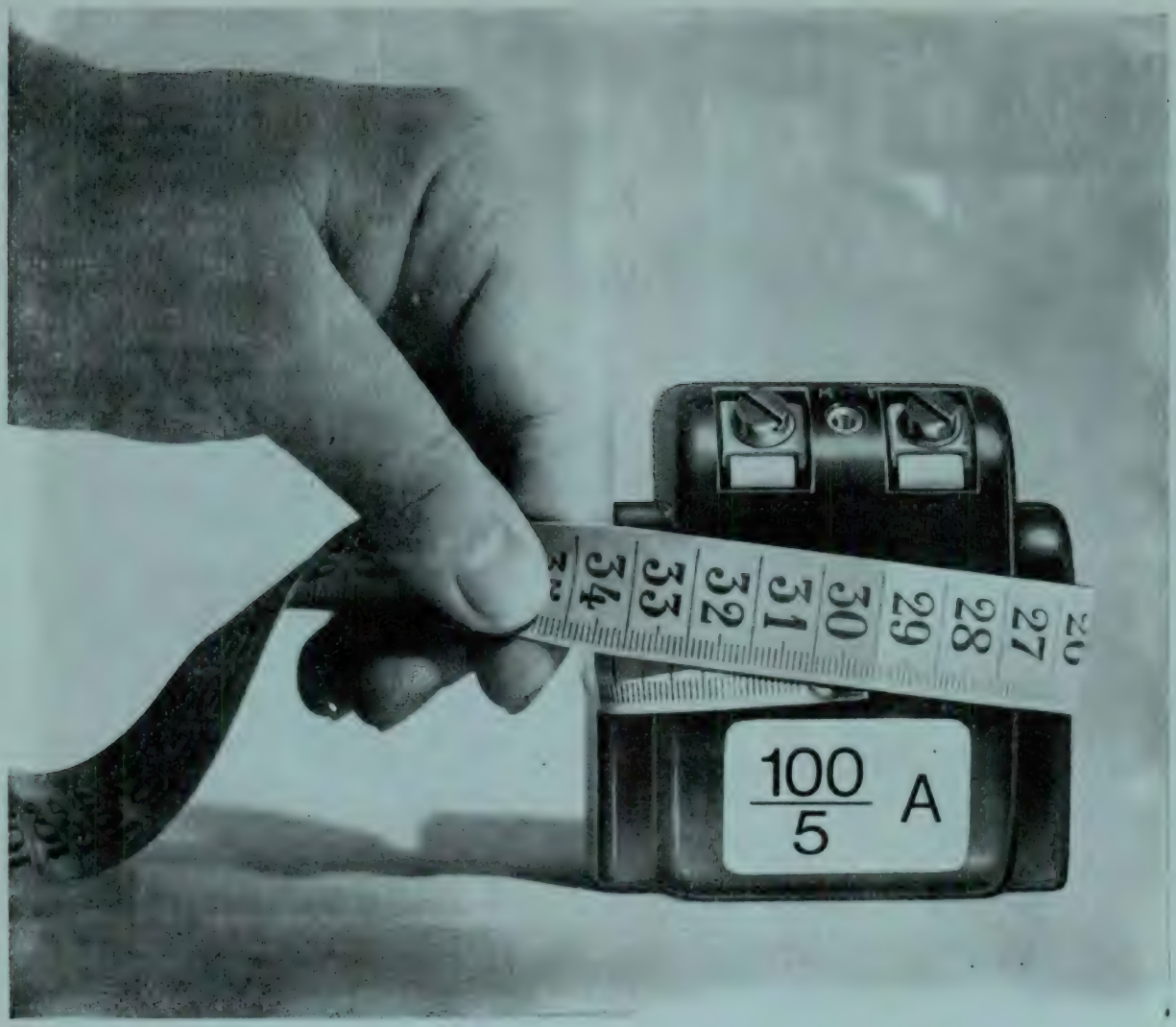
Para mais informações dirija-se a: Peter K. Johnson — 201 East 42nd Street — New York, N. Y. 10017 — E. U. A.

Publicação da I. C. I. D.

Está à venda a publicação seguinte, da Comissão Internacional de Irrigação e Drenagem (New Delhi):

— "Étude Universelle des Résultats Expérimentaux sur la Protéction contre les Pertes par Évaporation dans les Réservoirs" (U. S. $ 1.50).

Os pedidos devem ser dirigidos à respectiva Comissão Nacional Portuguesa.



dist. Belarte

... e mesmo, o de 800/5 A também tem um perímetro tão reduzido como este

AEG

É pois fácil a sua substituição. O seu «núcleo» em fita, garante um comportamento favorável da curva de erros. Estes transformadores do tipo ILO têm aplicação universal: até 250 A como transformadores de enrolamento. Daí para cima como transformadores de barramento. Assim, para todas as intensidades nominais no primário entre 5 e 750 A, a potência nominal é igual. Os transformadores ILO possuem uma resistência 30 % superior à do tipo normal: a protecção contra sobrecargas de aparelhos é melhor. A montagem é facílima: sòmente 2 parafusos. O ILO pode ser fornecido para sete razões de transformação, com janelas 30x5 ou 40x10, para as potências nominais das classe 1 e 3, bem como da classe 0,5 e ainda um tipo de aferição.

AEG-LUSITANA DE ELECTRICIDADE

Transformadores de medida AEG

confiança para a construção com

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

Companhia Portuguesa de Trefilaria
S. A. R. L.
ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kgf / cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kgf / cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO
R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º Dt.º
TELEFONES 671224/5 e 673785 - LISBOA

CONSTRUÇÕES PRÉ-FABRICADAS
100% RECUPERÁVEIS

CASAS DE HABITAÇÃO
POUSADAS • MOTÉIS • ESCOLAS
ENFERMARIAS • IGREJAS • CASERNAS
HOSPITAIS • ARMAZÉNS

ESTRUTURAS METÁLICAS
DE GRANDES DIMENSÕES
ANDAIMES • PAVILHÕES • COBERTURAS
ALUGUER E VENDA

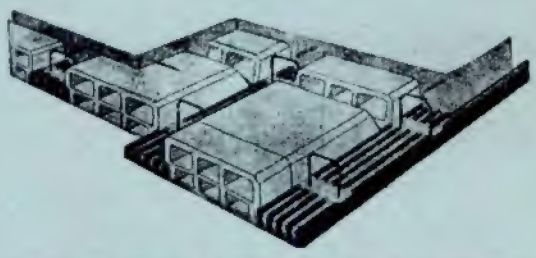
ESCODEL

UMA CERTEZA DO PRESENTE,
COM A TÉCNICA DO PASSADO

SEDE: R. FERREIRA LAPA, 42, 1.º D.
TELEF. 553123 — LISBOA
FÁBRICA — QUEIJAS

PRÉ - ESFORÇADOS CERÂMICOS

PATIAL
patente stahlton



PAVIMENTOS, TECTOS, FORROS, COBERTURAS, ASNAS, SILOS

CERVAL
CERÂMICA VALE DE LOBOS, L.DA

R. JOAQUIM A. AGUIAR, 41, 5.º-D. - LISBOA - TEL. 531138/9/0

VIDA ESCOLAR E ASSOCIATIVA

C. D. U. 536.2:517.9

A EQUAÇÃO DO CALOR EM COORDENADAS ESFÉRICAS (*)

por ÁLVARO BENTO LEAL
Assistente de Termodinâmica
do I. S. T.

RESUMO

Apresentam-se resultados conhecidos da Análise relativos à equação do calor em coordenadas esféricas. Passam-se em revisão as funções de Legendre.

Como exemplos são apresentadas duas aplicações: o regime transiente numa esfera e o viscosimetro de placa e cone.

Como meio de estimular e obter maior benefício dum esforço em comum reconheceram os colaboradores do Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica (do I. A. C.) a utilidade da realização periódica de colóquios internos para discussão de matérias relativas à sua formação de base ou de aspectos específicos do seu domínio de investigação. E embora os colóquios tenham tido um carácter restrito alguns dos temas versados afiguram-se de interesse mais geral e por isso se promove a sua divulgação.

O trabalho que se segue do Sr. Eng.º A. Bento Leal, integra-se neste espírito e sendo o primeiro duma série não quisemos deixar de para ela chamar a atenção dos interessados.

J. Delgado Domingos.

1. INTRODUÇÃO

Um problema de condução de calor, num sólido sem fontes, consiste na pesquisa de uma função T, que satisfaça a equação

$$\text{lap } T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

e ainda determinadas condições fronteiras e iniciais.

A forma mais usual da solução do problema é a utilização do método de separação de variáveis, que quando possível, permite achar a função T, à parte um certo número de constantes (valores próprios e constantes pròpriamente ditas).

Em coordenadas cartesianas as equações diferenciais ordinárias resultantes da aplicação do método de separação de variáveis são de fácil integração, pois são lineares de coeficientes constantes e as funções integrais estão sobejamente estudadas de forma que é fácil a sua manipulação analítica. Portanto, quando possível, serão estas as coordenadas utilizadas.

Simplesmente, a forma das condições aos limites pode ser extremamente complicada, quando expressa nas coordenadas naturais (cartesianas); ora é fundamentalmente a forma das condições aos limites que condiciona a escolha do sistema de coordenadas, pois o problema mais delicado que surge é o de determinação dos valores próprios (valores das constantes de separação que compatibilizam a solução com as condições aos limites) em cada problema particular.

Em vista disto, um problema em que seja fácil exprimir as condições aos limites em coordenadas esféricas (por exemplo: condução do calor em esferas, sectores de esfera, cones, etc.), somos forçados a abandonar a simplicidade formal das equações diferenciais ordinárias resultantes da separação, em coordenadas cartesianas e adoptar

(*) Colóquio realizado no Laboratório de Caldeiras e Permutadores de Calor do I. S. T. em 28 de Abril de 1967.

as coordenadas esféricas. Estas são definidas em relação às rectangulares por:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \qquad (2)$$

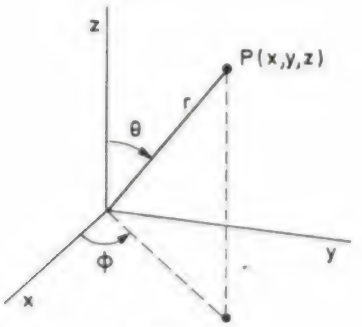


Fig. 1

2. EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR EM COORDENADAS ESFÉRICAS

A equação (1) virá expressa, em coordenadas esféricas, por, [1]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \ (*) \qquad (3)$$

α — é a difusividade térmica que vamos supor sempre constante.

2.1 Aplicação do método de separação de variáveis

Consiste em admitir que a solução tem a forma

$$\boxed{T = R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\phi)\ \tau(t)} \qquad (4)$$

(*) Se houver fontes de calor, no domínio em estudo, o segundo membro desta equação é diferente de zero, e o problema divide-se em dois: o que vamos tratar aqui (pesquisa do integral geral da equação homogénea) e o problema da pesquisa integral particular da equação não homogénea (com o segundo membro diferente de zero).

A equação de propagação das ondas em coordenadas esféricas é idêntica a (3) excepto no termo $-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ que deverá ser substituído por $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$, onde agora T é a grandeza que se propaga e c é a velocidade de propagação. Tudo o que vai dizer-se é aplicável a este caso, salvo a modificação que assinalará na devida altura.

Substituamos (4) em (3) virá:

$$\Theta \Phi \tau \frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\Theta \Phi \tau \frac{d R}{d r} + \frac{R \Theta \tau}{r^2 \sin \theta}\frac{d}{d \theta}\left(\sin \theta \frac{d \Theta}{d \theta}\right) + \frac{R \Theta \tau}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{d \Phi}{d \phi^2} - \frac{R \Theta \Phi}{\alpha}\frac{d \tau}{d t} = 0$$

Dividindo por $R \Theta \Phi \tau$ vem:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{1}{R}\frac{d R}{d r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta\, \Theta}\frac{d}{d \theta}\left(\sin \theta \frac{d \Theta}{d \theta}\right) + \frac{1}{\Phi\, r^2 \sin^2 \theta}\frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} - \frac{1}{\alpha \tau}\frac{d \tau}{d t} = 0 \qquad (5)$$

O último termo de (5) é só função de t, enquanto que a soma dos restantes não o é, logo para que a soma das duas quantidades seja nula ambas terão de ser iguais a constantes simétricas, isto é:

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha \tau}\frac{d \tau}{d t} = K^2} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{1}{R}\frac{d R}{d r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\cdot\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d \theta}\left(\sin \theta \frac{d \Theta}{d \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} + K^2 = 0 \qquad (7)$$

(K = constante)

Multiplicando a equação (7) por $r^2 \sin^2 \theta$, e simplificando, teremos:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R}\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2 r \sin^2 \theta}{R}\frac{d R}{d r} + \frac{\sin \theta}{\Theta}\frac{d}{d \theta}\left(\sin \theta \frac{d \Theta}{d \theta}\right) + K^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} = 0 \qquad (8)$$

Em (8) o último termo só depende de ϕ enquanto que os restantes não. Pelo mesmo raciocínio já feito atrás, teremos:

$$\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi} + m^2 = 0} \qquad (9)$$

$$\frac{r^2 \sin^2\theta}{R}\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2 r \sin^2\theta}{R}\frac{d R}{d r} +$$

$$+ \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + K^2 r^2 \sin^2\theta - m^2 = 0 \qquad (10)$$

(m = constante)

Façamos a divisão de (10) por $\sin^2\theta$; agrupando os termos virá:

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} + K^2 r^2}_{(a)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\sin\theta . \Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{(b)} = 0 \quad (11)$$

(a) é só função de r e (b) só função de θ, como anteriormente, teremos:

$$\boxed{\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} + K^2 r^2 - n(n+1) = 0}$$

(12)

$$\boxed{\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + n(n+1) = 0}$$

(13)

onde n = constante.

As equações (6), (9), (12) e (13) permitirão obter os valores de τ, Φ, R e Θ.

Passemos a analisar cada uma delas.

3. EQUAÇÃO NO TEMPO

A equação (6)

$$-\frac{1}{\alpha\tau}\frac{d\tau}{dt} = K^2,$$

dará após a integração:

$$\boxed{\tau = C_1 e^{-K^2 \alpha t}} \quad (*) \qquad (14)$$

(C_1 = constante)

4. EQUAÇÃO EM ϕ

A equação (9)

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2 = 0$$

é também de integração fácil sendo a sua solução dada por

$$\boxed{\Phi = C_2 \cos m\phi + C_3 \sin m\phi} \qquad (15)$$

5. EQUAÇÃO EM r

A equação (12) pode por-se na forma

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R}{d r} + \left[K^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] R = 0 \quad (16)$$

A obtenção da solução desta equação é mais difícil do que nos casos anteriores, mas é possível a partir das etapas indicadas a seguir:

5.1 Mudança de variável U = K r

$$\frac{d}{dr} = K\frac{d}{du}$$

Substituindo em (16) virá

$$K^2\frac{d^2 R}{d u^2} + 2\frac{K^2}{u}\frac{dR}{du} + \left[K^2 - \frac{n(n+1)}{u^2}K^2\right] R = 0$$

Dividindo em K^2 obtemos:

$$\frac{d^2 R}{d u^2} + \frac{2}{u}\frac{dR}{du} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{u^2}\right] R = 0 \quad (17)$$

(17) é válida só para $K \neq 0$

5.2 Transformação $R = u^{-1/2} U$

$$\frac{dR}{du} = -\frac{1}{2} u^{-3/2} U + u^{-1/2}\frac{dU}{du}$$

(*) Nota: — Se se tratasse da equação de progação de ondas, a diferença relativamente à equação do calor apareceria agora, uma vez que τ seria dado por:

$$\tau = C^1_1 \sin(Kct) + C^1_2 \cos(Kct)$$

$$\frac{d^2 R}{d u^2} = \frac{3}{4} u^{-5/2} U - u^{-3/2} \frac{dU}{du} + u^{-1/2} \frac{d^2 U}{d u^2}$$

Substituindo em (17) e simplificando, vem:

$$(18) \quad \frac{d^2 U}{d u^2} + \frac{1}{u} \frac{dU}{du} + \left[1 - \frac{(n + 1/2)^2}{u^2} \right] U = 0$$

A equação (18) já é bem conhecida da cadeira de Cálculo Infinitesimal, ver [2]. Trata-se da equação de Bessel (*) de ordem $n + 1/2$, cuja solução é

$$(19) \quad U = C_4 J_{n+\frac{1}{2}} (u) + C_5 J_{-n-\frac{1}{2}} (u)$$

Se $n + \frac{1}{2}$ for inteiro, teremos de substituir $J_{-n-\frac{1}{2}}$ por $Y_{n+\frac{1}{2}}$ (u).

Finalmente teremos para R (r) o valor

$$R(r) = C_4 (K r)^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}} (K r) +$$

$$(20) \quad + C_5 (K r)^{-1/2} J_{-n-1/2} (K r)$$

Para $K \neq 0$ e $n + \frac{1}{2}$ diferente de inteiro.

O caso em que $K = 0$ será visto mais adiante.

6. EQUAÇÃO EM θ

A equação (13)

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + n(n+1) = 0,$$

é ainda susceptível de integração analítica, embora o processo seja neste caso um tanto complicado. Façamos:

6.1 Mudança de variavel $\sigma = \cos\theta$

$$\frac{d}{d\theta} = - \sin\theta \frac{d}{d\sigma}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \sigma^2$$

Substituindo em (13) e simplificado, vem:

$$\frac{d}{d\sigma} \left[(1-\sigma^2) \frac{d\Theta}{d\sigma} \right] +$$

$$(21) \quad + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\sigma^2} \right] \Theta = 0$$

Esta equação é designada na Análise por equação associada de Legendre.

6.2 Escrita da função $\Theta(\theta)$

As soluções de (21) são conhecidas como funções associadas de Legendre-Ferrers, designando-se as duas soluções independentes por $P_n^m(\sigma)$ e $Q_n^m(\sigma)$.

A função $\Theta(\theta)$, terá portanto a forma

$$(22) \quad \Theta(\theta) = C_6 P_n^m(\cos\theta) + C_7 Q_n^m(\cos\theta).$$

Voltaremos a este ponto mais adiante.

7. EXPRESSÃO GERAL DE T (r, θ, ϕ, t)

A solução é, de acordo com (4), (14), (15), (20) e (22), a seguinte:

$$T = C_1 e^{k^2\alpha t} (C_2 \cos m\phi + C_3 \sin m\phi) \left[C_4 (kr)^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_5 (kr)^{-1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[C_6 P_n^m(\cos\theta) + C_7 Q_n^m(\cos\theta) \right] \quad (23)$$

Em (23) sòmente 6 das 7 constantes multiplicativas são independentes pelo que T pode escrever-se como

$$T = e^{-k\alpha^2 t} \left(A_1 \cos m\phi + A_2 \sin m\phi \right)$$

$$\left[A_3 (kr)^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + A_4 (kr)^{-1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) \right] \cdot$$

$$\left[A_5 P_n^m(\cos\ ) + A_6 Q_n^m(\cos\theta) \right] \quad (24)$$

Da análise anterior ficamos a conhecer a forma da solução, à parte as constantes de separação K, m e n e as constantes mutiplicativas A_1, $A_2, \ldots, A_6$; que serão condicionadas pelas condições aos limites.

Admitamos que a forma obtida para T é compatível com as condições aos limites para o conjunto particular de valores.

$$K_i, m_j, n_e \quad (25)$$

(*) *Nota:* É corrente chamar a $J_{n+\frac{1}{2}}$ e $J_{-n-\frac{1}{2}}$ funções esféricas de Bessel.

Estes valores darão quando substituídos em (24) um valor para T a que chamamos função própria e representamos por T_{ije}.

Mas o conjunto (25) não é o único compatível com as condições aos limites. No caso geral haverá um determinado número (eventualmente infinito) de conjuntos $\{K_i, m_j, n_e\}$, que serão igualmente possíveis.

Como equação (1) é linear, qualquer combinação linear de funções próprias T_{ijk} será solução compatível e portanto a forma mais geral da solução será:

$$T(r, \theta, \phi, t) = \sum_i \sum_j \sum_e e^{-k_i^2 \alpha t} \left[A_{1_{ije}} \cos m_j \phi + A_{2_{ije}} \sin m_j \phi \right] \cdot \left[A_{3_{ije}} (K_i r)^{-\frac{1}{2}} J_{n_e + \frac{1}{2}} (K_i r) + A_{4_{ije}} (K_i r)^{-1/2} J_{-n_e - 1/2} (K_i r) \right] \left[A_{5_{ije}} \tfrac{1}{2} P_{n_e}^{m_j} (\cos \theta) + A_{6_{ijk}} Q_{n_e}^{m_j} \cos \theta) \right] \quad (26)$$

As constantes $A_{1ije}, \ldots, A_{6ije}$, são determinadas de forma que as condições aos limites sejam reproduzidas pela solução.

Num problema de transmissão de calor determinam-se, em geral, os valores próprios de forma que as condições fronteiras sejam satisfeitas e determinam-se os A's a partir da condição inicial, não sendo no entanto forçoso tal procedimento.

Como nota, sugere-se o seguinte método de determinação numérica dos valores próprios e das constantes:

Aplica-se a solução (26) a um determinado número de pontos da fronteira e a um certo número de instantes. Determinam-se os K_i, m_j, n_e, $A_{1ije} \cdots A_{6ije}$, de forma que os desvios de T relativos ao valor das condições aos limites nos pontos e instantes considerados seja mínimo, dependendo a precisão, do número de pontos e instantes adoptados e da extensão do somatório considerado.

O Exemplo 1, apresentado mais adiante ilustra a forma habitual de determinação dos valores próprios.

8. NOTA A RESPEITO DAS FUNÇÕES DE LEGENDRE P_n e Q_n

8.1 Equação de Legendre

A forma desta equação é bem conhecida (ver por exemplo [3], [4], [5])

$$(1-\sigma) \frac{d^2 \chi}{d\sigma^2} - 2\sigma \frac{d\chi}{d\sigma} + n(n+1)\chi = 0 \quad (27)$$

As duas soluções independentes desta equação são conhecidas por: função de Legendre de 1.ª espécie $P_n(\sigma)$ e função de Legendre de 2.ª espécie $Q_n(\sigma)$.

O programa dos nossos cursos de engenharia inclui o estudo da função $P_n(\sigma)$ quando n é inteiro, (ver por exemplo [8]).

No entanto em transmissão de calor somos por vezes forçados a recorrer a $P_n(\sigma)$ e $Q_n(\sigma)$ com n diferente de inteiro, pelo que nos parece útil apresentar uma dedução mais geral destas funções.

8.2 Determinação $P_n(\sigma)$ pelo método do integral de Schläfli

Consideremos a seguinte expressão, devida a Schläfli (ver [3], [4], [6]).

$$\chi_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{2^n (z-\sigma)^{n+1}} dz \quad (28)$$

onde z é a variável complexa de argumento compreendido entre $-\pi$ e π e C um contorno fechado não especificado por enquanto.

Notando que:

$$(1-\sigma^2) \frac{d^2 \chi_n}{d\sigma^2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(1-\sigma^2)}{2\pi i . 2^n} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-\sigma)^{n+3}} dz \quad (29)$$

$$-2\sigma \frac{d\chi_n}{d\sigma} = \frac{(n+1)}{2\pi i . 2^n} 2\sigma \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-\sigma)^{n+2}} dz \quad (30)$$

$$(n+1)\chi_n = \frac{n(n+1)}{2\pi i . 2^n} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-\sigma)^{n+1}} dz \quad (31)$$

e somando (29), (30) e (31) obtemos:

$$(1-\sigma^2) \frac{d^2 \chi_n}{d\sigma^2} - 2\sigma \frac{d\chi_n}{d\sigma} + n(n+1)\chi_n =$$

$$= \frac{(n+1)}{2\pi i . 2^n} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-\sigma)^{n+3}} [(n+2)(1-\sigma^2) - 2\sigma(z-\sigma) + n(z-\sigma)^2] dz$$

Efectuando algumas operações no 2.º membro é possível dar-lhe a seguinte forma:

$$(1-\sigma^2)\frac{d^2 y_n}{d\sigma^2} - 2\sigma\frac{d y_n}{d\sigma} + n(n+1)\, y_n =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi i.\, 2^n}\int_C \frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-\sigma)^{n+2}}\right] dz \qquad (31)$$

Se o 2.º membro for nulo, a equação identifica-se com (27) e a expressão (28) será então solução da equação de Legendre.

Para tornar o 2.º membro de (31) nulo temos a possibilidade de impor para o contorno de integração C, a forma conveniente.

Resumindo, vamos procurar um contorno de integração C, que torne o integral.

$$\int_C \frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-\sigma)^{n+2}}\right] dz \qquad (32)$$

nulo e para o qual o integral (28) não seja idênticamente nulo.

Portanto C deve envolver singularidades da função integranda de (28).

Admitamos que n é inteiro positivo ou zero e consideremos A um contorno descrito no sentido positivo, envolvendo o ponto $z=\sigma$, que é neste caso a única singularidade da função integranda (28).

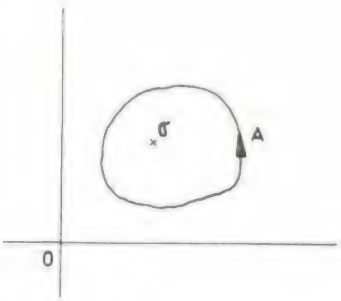


Fig. 2

O integral (32) será igual à diferença do valor função $(z^2-1)^{n+1}(z-\sigma)^{-n-2}$ tomada após uma circulação completa e o valor da mesma função no ponto de partida antes dessa circulação.

Conclui-se que (32) será nulo se a função $(z^2-1)^{n+1}(z-\sigma)^{-n-2}$ retomar o seu valor inicial após uma volta completa.

No nosso caso a função $(z^2-1)^n(z-\sigma)^{-n-2}$ virá multiplicada por

$$e^{2\pi i(-n-2)} = 1$$

após uma circulação.

Concluimos então, que para n inteiro positivo ou zero, o contorno A satisfaz o nosso objectivo.

À função (28), definida tomando este contorno chamamos polinómio de Legendre de ordem n.

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A(\sigma+)} \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-\sigma)^{n+2}}\, dz \quad (n = \text{inteiro}) \qquad (33)$$

Passemos agora ao caso em que n é diferente de inteiro.

Neste caso, as singularidades da função integranda de (28) são os pontos $z=1$, $z=-1$ e $z=\sigma$.

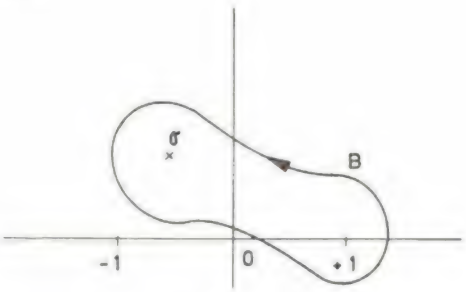


Fig. 3

Se considerar-mos agora um contorno que envolva os pontos $z=\sigma$ e $z=1$, mas não o ponto $z=-1$ a função $(z^2-1)^{n+1}(\sigma-z)^{-n-2}$ virá multiplicada, após a circulação, pelos factores $e^{2\pi i(n+1)}$ (por ter envolvido o ponto $z=1$) e por $e^{2\pi i(-n-2)}$ (por ter envolvido o ponto $z=\sigma$), ou seja por

$$e^{2\pi i(n+1)}\, e^{2\pi i(-n-2)} = 1,$$

isto é, reproduz o seu valor inicial.

Conclui-se portanto que B é um contorno que serve o nosso objectivo.

À função (28) onde se toma um contorno como B, chama-se função de Legendre de 1.ª espécie de ordem n.

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B(1^+,\,\sigma^+)} \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-\sigma)^{n+1}}\, dz \qquad (34)$$

para n qualquer, não inteiro negativo.

Deve ter-se em atenção que a função integranda para n não inteiro só é holomorfa no complementar do eixo real negativo tornado de -1 a $-\infty$

A junção $P_n(\sigma)$ é analítica suposto retirado do plano complexo, o eixo real desde -1 a $-\infty$.

8.3. Algumas fórmulas úteis relativas a $P_n(\sigma)$.

Com base na definição (34) é possível deduzir inúmeras propriedades de $P_n(\sigma)$.

(Ver por ex. [3], [5], [7]).

Nesta secção o nosso objectivo é simplesmente recordar algumas dessas propriedades.

— Expressão de $P_n(\sigma)$ a partir do 1.º integral de Laplace.

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2} \cos \phi]^n \, d\phi. \quad (35)$$

Para n inteiro, (35) aplica-se a qualquer z.

Para n não inteiro aplica-se sómente aos valores de z tais que:

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} \left(\text{ver } [3]\right).$$

— Fórmula de Rodrigues.

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{d^n}{d\sigma^n} (z^2 - 1)^n \quad (36)$$

onde n = inteiro positivo.

— Atendendo à equação (27) e ao facto de $n(n+1) = (-n-1)(-n)$, conclui-se que:

$$P_n(\sigma) = P_{-n-1}(\sigma) \quad (37)$$

que permite calcular os valores de P_n para n negativo, sabidos os valores para n positivo.

— Fórmulas de recorrência:

$$(n+1) P_{n+1} - (2n+1) \sigma P_n + n P_{n-1} = 0 \quad (38)$$

$$\sigma \frac{d P_n}{d\sigma} - \frac{d P_{n-1}}{d\sigma} = n P_n \quad (38''_a)$$

Podem encontrar-se mais fórmulas de recorrência em [3] e [7].

— Relações de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} P_i(\sigma) P_j(\sigma) \, d\sigma = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2}{2i+1} & (i = j) \end{cases} \quad (39)$$

$$i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

— Com base nas equações (39) é possível desenvolver qualquer função $f(\sigma)$ contínua em série de polinómios de Legendre

$$f(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(\sigma) \quad (40)$$

onde a_i é dado por

$$\int_{-1}^{1} f(\sigma) P_i(\sigma) \, d\sigma = \frac{2 a_i}{2i+1} \quad (41)$$

Se $f(\sigma)$ for um polinómio de grau m, os a_i são nulos, para $i > m$.

Passemos agora a tratar da outra solução independente da equação de Legendre.

8.4 Definição das funções de Legendre de 2.ª espécie $Q_n(\sigma)$

Para n não inteiro, $Q_n(\sigma)$ é definido por um integral semelhante a (28)

$$Q_n(\sigma) = \frac{1}{4i \sin n\pi} \int_{D(1,^+ - 1^-)} \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n (\sigma - z)^{n+1}} \, dZ, \quad (42)$$

que se pode verificar, (por um processo análogo ao utilizado para $P_n(\sigma)$) ser solução da equação de Legendre, desde que o contorno D seja escolhido de forma que a função $(z^2-1)^{n+1} (\sigma - z)^{-n-2}$ se reproduza após uma circulação completa.

Consideremos então um contorno D definido da seguinte forma:

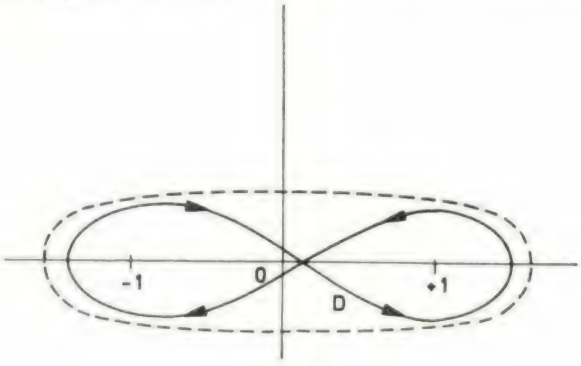


Fig. 4

um percurso em oito, que envolve os pontos $+1$ e -1, singularidades da função integranda de

(42), todo ele encerrado numa elipse de focos $+1$ e -1, reduzida de modo a que a definição (42) se estenda a todos os σ, excepto aqueles situados no eixo real entre $+1$ e $-\infty$.

Vê-se fàcilmente, que após a circulação a função $(z^2-1)^{n+1}\ (\sigma-z)^{-n-2}$ vem multiplicada por $e^{2\pi in}$ (por contornar $Z=1$, no sentido positivo) e por $e^{-2\pi in}$ (por contornar $Z=-1$, no sentido negativo), ou seja, por

$$e^{2\pi i(n+1)}\ e^{-2\pi i(n+1)}=1\,,$$

isto é, o contorno D satisfaz ao nosso objectivo.

Em resumo: (42) define $Q_n(\sigma)$ para n não inteiro e para σ não real compreendido entre 1 e $-\infty$.

Consideremos agora o caso em que n é inteiro positivo. Neste caso $Q_n(\sigma)$ é definido por

$$(43)\qquad Q_n(\sigma)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-z^2)^n}{(\sigma-z)^{n+1}}\,dz$$

onde se toma $\arg(z+1)=\arg(z-1)=0$, ao longo do caminho de integração, e σ diferente de qualquer número real compreendido entre -1 e $+1$.

Por um processo análogo ao já utilizado atrás prova-se, que (43) é solução da equação de Legendre, desde que

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^{n+1}(\sigma-z)^{-n-2}\right]dz$$

seja nulo, o que se verifica, pois a função $(1-z^2)^{n+1}(\sigma-z)^{-n-2}$ é nula nos pontos $z=+1$ e $z=-1$.

Para n inteiro negativo a função $Q_n(\sigma)$ é obtida a partir de $Q_{-n-1}(\sigma)$, pois atendendo à equação (27), verifica-se que

$$(44)\qquad Q_n(\sigma)=Q_{-n-1}(\sigma).$$

Em resumo: (43) define a função de Legendre de 2.ª espécie $Q_n(\sigma)$, para n inteiro positivo e para σ diferente de qualquer número real compreendido em -1 e $+1$.

8.5 Algumas propriedades de $Q_n(\sigma)$

— Indicam-se duas das fórmulas de recorrência que é possível obter (ver [3], [5]):

$$(45)\qquad (n+1)\,Q_{n+1}-(2n+1)\,\sigma\,Q_n+n\,Q_{n-1}=0$$

$$(46)\qquad \sigma\frac{dQ_n}{d\sigma}-\frac{dQ_{n-1}}{d\sigma}=n\,Q_n$$

que são iguais às apresentadas para P_n.

— Apresentam-se alguns valores de Q_n

$$Q_0=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\,,\quad Q_1=\frac{1}{2}\,\sigma\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-1$$

$$(47)\qquad Q_2=\frac{1}{2}\,P_2(\sigma)\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-\frac{3}{2}\,\sigma$$

e ainda uma expressão geral para n inteiro positivo

$$(48)\qquad \frac{1}{5}\,P_n(\sigma)\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-Q_n(\sigma)=f_{n-1}(\sigma)$$

onde $f_{n-1}(\sigma)$ é um polinómio em σ de grau $n-1$

— Admitamos agora que σ é real e compreendido entre -1 e $+1$; de (47) podemos obter:

$$\lim_{\delta\to 0}Q_n(\sigma\pm\delta i)=$$

$$(49)\qquad =\frac{1}{2}\,P_n(\sigma)\left\{\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\mp\pi i\right\}-f_{n-1}(\sigma)$$

(48) ilustra bem a razão porque não se definiu Q_n para $1<\sigma$ real <-1, mas (49) habilita-nos a definir duma maneira unívoca Q_n para σ nessas condições, adoptando a definição que se segue:

$$Q_n(\sigma)=\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{2}Q_n(\sigma+\delta i)+\frac{1}{2}Q_n(\sigma-\delta i)\right]\qquad(50)$$

$$-1<\sigma\text{ real}<1$$

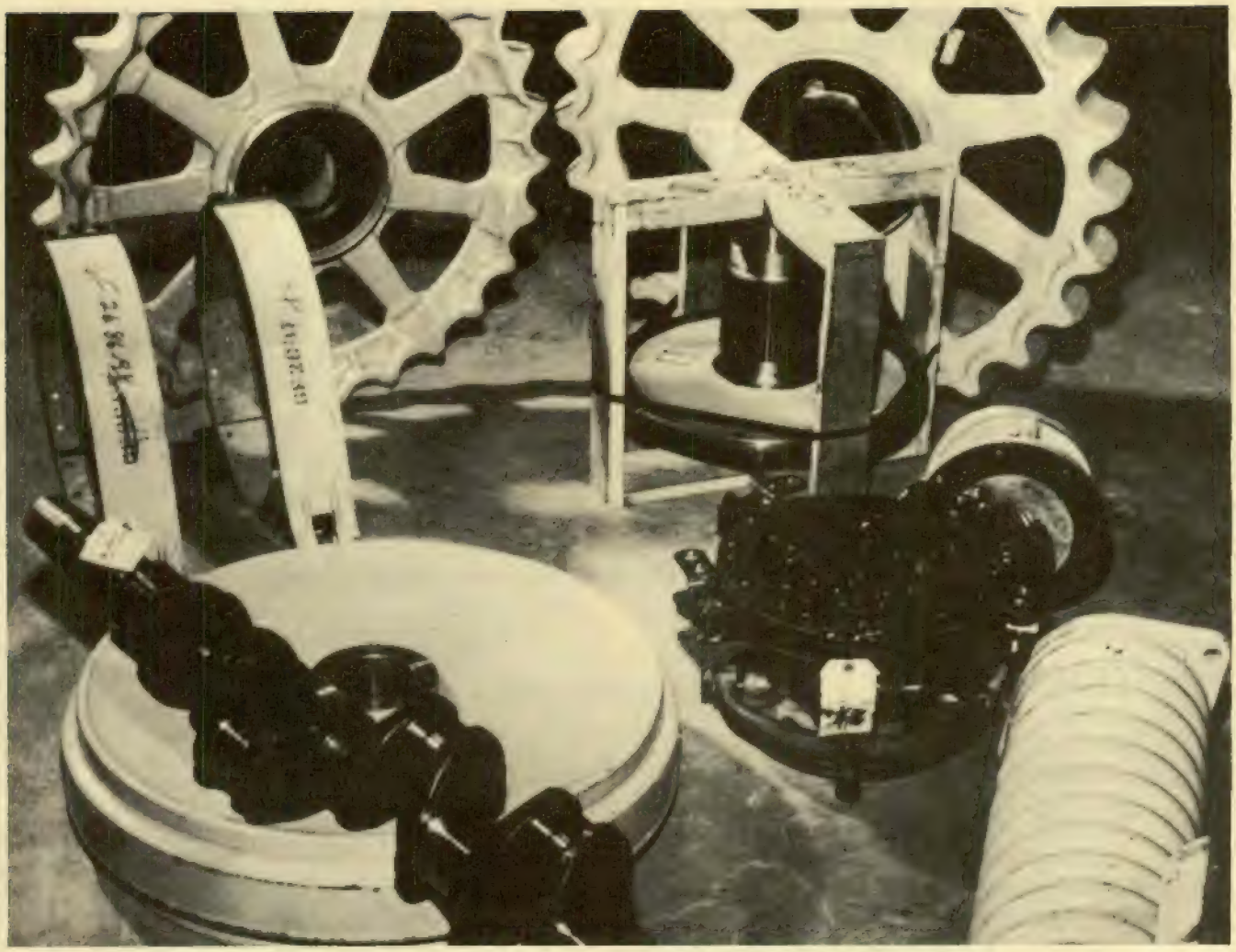
De (49) é também imediato que,

$$\lim_{\delta\to 0}\left[Q_n(\sigma+\delta i)-Q_n(\sigma-\delta i)\right]=\pi i\,P_n(\sigma)\qquad(51)$$

Com esta relação é fácil demonstrar que (50) satisfaz à equação de Legendre.

Em resumo: quando $-1<\sigma$ real $<+1$ e n inteiro $\geqslant 0$ podemos tomar as expressões de $Q_n(\sigma)$ definidas atrás, adoptando em vez de

$$\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\text{ o valor }\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\,.$$



OS CONJUNTOS CATERPILLAR RECONSTRUÍDOS DURAM QUASE TANTO COMO OS NOVOS

■ Os conjuntos de peças, reconstruídos convenientemente, proporcionam um rendimento quase idêntico ao dos conjuntos novos. ■ Uma reconstrução, porém, exige cuidados especiais — cuidados esses que nós, distribuidores Caterpillar, oferecemos aos nossos Clientes.
■ Nas nossas oficinas, operários treinados pela Caterpillar utilizam peças e técnicas recomendadas pela fábrica, de modo a respeitarem fielmente a qualidade Caterpillar. Todos os trabalhos são efectuados rápida e eficazmente, graças ao equipamento ali existente.
MAIS HORAS DE TRABALHO OBTIDO E MENOS DINHEIRO DESPENDIDO EM PEÇAS NOVAS. Além disto, trocamos conjuntos usados por outros reconstruídos convenientemente, proporcionando uma economia de 20 a 30 %, além da economia de tempo. ■ Trocando conjuntos de peças, evitam-se as reparações longas que imobilizam as máquinas, tornando-as improdutivas.

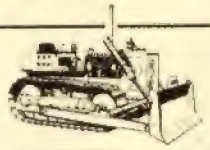
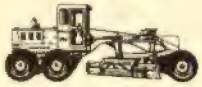
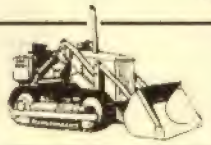
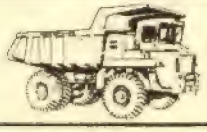
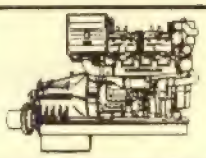
S.T.E.T.

SOC. TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S. A. R. L.

PRIOR VELHO (SACAVÉM) · PORTO · BEJA

Caterpillar e Cat são marcas registadas de Caterpillar Tractor Co.

▪ A mais completa linha de equipamentos para terraplenagem...
▪ A mais completa linha de motores Diesel...

TRACTORES DE RASTO	6 modelos de 65 a 385 HP ao volante	
MOTONIVELADORAS	6 modelos de 80 a 222 HP ao volante	
MOTORSCRAPERS	9 modelos de 300 a 900 HP ao volante	
BULLDOZERS DE RODAS	2 modelos de 300 a 400 HP ao volante	
PÁS CARREGADORAS DE RASTO	4 modelos de 60 a 150 HP ao volante	
PÁS CARREGADORAS DE RODAS	6 modelos de 80 a 300 HP ao volante	
CAMIÃO DE ESTALEIRO	400 HP ao volante	
MOTORES MARÍTIMOS	19 modelos de 45 a 1 125 HP	
MOTORES INDUSTRIAIS	18 " " 70 a 1 125 HP.	
GRUPOS ELECTROGÉNEOS	19 " " 31 a 812 KVA	
MOTORES PARA CAMIÃO	7 " " 145 a 375 HP	

À
S.T.E.T.
Apartado 1351 – Lisboa

TEC

Desejo receber (SEM COMPROMISSO DA MINHA PARTE):

- ☐ Literatura sobre equipamentos **CATERPILLAR**
  Indicar os modelos _____
- ☐ Literatura sobre motores **CATERPILLAR**
  Indicar os modelos _____
- ☐ A visita de um Delegado de Vendas

NOME OU FIRMA _____
PROFISSÃO OU ACTIVIDADE _____
ENDEREÇO _____
_____

CATERPILLAR
Caterpillar, Cat e Traxcavator são Marcas Registadas da Caterpillar Tractor Co.

RECORTE ESTE CUPÃO
E ENVIE-O À S.T.E.T.
SEM DEMORA

S.T.E.T
SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S. A. R. L.
PRIOR VELHO (SACAVÉM) • PORTO • BEJA

Indica-se ainda uma expressão devida a Neumann que relaciona Q_n com P_n e é válida para n inteiro.

$$Q_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(z) \frac{dz}{\sigma - z} \qquad (50)$$

Muito mais haveria a dizer sobre as funções de Legendre, mas o nosso objectivo é sòmente recordar alguns conceitos que são necessários para obtermos as funções P_n^m e Q_n^m (soluções da equação (21)).

9. FUNÇÕES ASSOCIADAS DE LEGENDRE-FERRERS P_n^m e Q_n^m.

Vamos retomar o assunto deixado em suspenso em 6.2, que era deduzir a forma das soluções da equação

$$\frac{d}{d\sigma}\left[(1-\sigma^2)\frac{d\Theta}{d\sigma}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\sigma^2}\right]\Theta = 0.$$

Para alcançar o nosso objectivo vamos considerar as etapas seguintes:

9.1. — Transformação $\Theta = (1-\sigma^2)^{\frac{m}{2}} \psi$

Aplicando esta transformação de variável à equação (22) virá, após algumas simplificações

$$(1-\sigma^2)\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - 2(m+1)\sigma\frac{d\psi}{d\sigma} +$$

$$[n(n+1) - m(m+1)]\psi = 0 \qquad (51)$$

Vamos ver que é possível obter esta equação a partir da equação de Legendre.

9.2 Aplicação do operador $\frac{d^m}{d\sigma^m}$ a (27)

Voltemos à equação de Legendre (27)

$$(1-\sigma^2)\frac{d^2\chi}{d\sigma^2} - 2\sigma\frac{d\chi}{d\sigma} + n(n+1)\chi = 0$$

e apliquemos-lhe o operador $\frac{d^m}{d\sigma^m}$ (é evidente que o que se segue é só válido para m inteiro $\geqslant 0$).

Recordando que a aplicação do operador $\frac{d^m}{d\sigma^m}$ a um produto de funções corresponde ao desenvolvimento simbólico da soma, isto é:

$$\frac{d^m}{d\sigma^m}(f.\,g) = [f+g]^{(m)},$$

teremos:

$$\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[(1-\sigma^2)\frac{d^2\chi}{d\sigma^2}\right] = [(1-\sigma^2) + \chi^{(2)}]^{(m)} =$$

$$= (1-\sigma^2)\chi^{(m+2)} - 2m\sigma\chi^{(m+1)} - m(m+1)\chi^{(m)} \qquad (52)$$

pois $(1-\sigma^2)^{(3)} = 0$.

Por outro lado:

$$\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma\frac{d\chi}{d\sigma}\right] = \sigma\chi^{(m+1)} + m\chi^{(m)} \qquad (53)$$

A equação (27) virá após a aplicação do operador e depois de simplificada:

$$(1-\sigma^2)\frac{d^{m+2}\chi}{d\sigma^{m+2}} - 2(m+1)\sigma\frac{d^{m+1}\chi}{d\sigma^{m+1}} +$$

$$+ [n(n+1) - m(m+1)]\frac{d^m\chi}{d\sigma^m} = 0 \qquad (54)$$

Comparando (54) com (51), vemos que as duas equações se identificam se fizermos

$$\psi = \frac{d^m\chi}{d\sigma^m} \qquad (55)$$

Como as soluções da equação em χ eram P_n e Q_n as soluções da equação em ψ serão $\frac{d^m P_n}{d\sigma^m}$ e $\frac{d^m Q_n}{d\sigma^m}$.

9.3 Definição e propriedades de P_n^m e Q_n^m.

As soluções independentes da equação em Θ serão, atendendo ao que foi dito em 9.2, e ao facto de $\Theta = (1-\sigma^2)^{\frac{m}{2}}\psi$:

$$\left\{\begin{aligned} P_n^m(\sigma) &= (1-\sigma^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(\sigma)}{d\sigma^m} \\ Q_n^m(\sigma) &= (1-\sigma^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_n(\sigma)}{d\sigma^m} \end{aligned}\right. \qquad (55)$$

onde m é inteiro $\geqslant 0$.

(55) é a definição das funções associadas de Legendre segundo Ferrers e é a adoptada para σ

real compreendido entre -1 e 1, que é o que sucede no nosso problema.

Para σ não real compreendido entre -1 e 1, adoptam-se as definições segundo Hobson.

$$P_n^m(\sigma) = (\sigma^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d\sigma^m},$$

$$Q_n^m(\sigma) = (\sigma^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{d\sigma^m}$$

que é fácil de verificar satisfazerem também a equação (21):

Indica-se a seguir uma propriedade dos P_n^m útil nas aplicações:

$$\int_{-1}^{1} P_i^m(\sigma)\, P_j^m(\sigma)\, d\sigma = \begin{cases} 0 \quad (i \neq j) \\ \dfrac{2}{(2i+1)} \dfrac{(i+m)!}{(i-m)!} \quad (i=j) \end{cases} \tag{56}$$

para i, j, m inteiros $\geqslant 0$ e com $i \geqslant m$ e $j \geqslant m$.

Para terminar, indicam-se alguns valores de $P_n^m(\cos\theta)$, e $Q_n^m(\cos\theta)$ (ver [9]):

$P_0^0 = 1$

$P_1^0 = \cos\theta,\ P_1^1 = \sin\theta$

$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1),\ P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta,\ P_2^2 = 3\sin^2\theta$

$P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta),\ P_3^1 = \frac{1}{2}\sin\theta\,(15\cos^2\theta - 3),$

$P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta,\ P_3^3 = 15\sin^3\theta$

$P_4^0 = \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 3),\ P_4^1 = \frac{1}{2}\sin\theta$

$(35\cos^3\theta - 15\cos\theta),\ P_4^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta$

$(105\cos^3\theta - 15),\ P_4^3 = 105\sin^3\theta,\ P_4^4 = 105\sin^4\theta$

$P_5^0 = \frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta),\ P_5^1 = \frac{1}{8}\sin\theta$

$(315\cos^4\theta - 210\cos^2\theta + 15),\ P_5^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta$

$(315\cos^3\theta - 105\cos\theta),\ P_5^3 = \frac{1}{2}\sin^3\theta$

$(945\cos^2\theta - 105),\ P_5^4 = 945\sin^4\theta\cos\theta,$

$P_5^5 = 945\sin^5\theta$

$$Q_0^0 = \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{2}\cos\theta\log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} - 1$$

$$Q_1^1 = \frac{1}{2}\sin\theta\log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \operatorname{cotg}\theta$$

Valores tabelados de $P_n^m(\sigma)$ e $Q_n^m(\sigma)$ podem encontrar-se por exemplo em [6].

10. SIMPLIFICAÇÃO DE $T(r, \theta, \phi, t)$ EM CASOS PARTICULARES

10.1 Considerações a respeito do domínio

Algumas das funções contidas na expressão geral de T (24), podem tornar-se infinitas no domínio em estudo. Isto implica, que a constante A associada a essa função, se torne nula para que T não se torne infinito, isto é, o termo onde ocorre essa função desaparece da equação.

Das funções que aparecem em (24), existem duas que podem estar nestas condições: a função $(kr)^{-1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr)$ quando o ponto $r = 0$ pertence ao domínio e a função $Q_n^m(\cos\theta)$ quando $\cos\theta$ toma os valores de 1 ou -1 no domínio em estudo.

Resumindo: se $r = 0$ está incluído no domínio o termo $A_4 (kr)^{-1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(Kr)$ desaparece na equação (24); se $\theta = 0$ ou π pertence ao domínio o termo $A_6\, Q_n^m(\cos\theta)$ é eliminado em (24).

10.2 Simetria axial

Damos este nome à situação física que corresponde a uma geometria e condições aos limites com simetria cilíndrica relativamente ao eixo dos zz, isto é, T não depende da coordenada ϕ.

Nestas condições, o termo $\dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} \dfrac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$ da equação (3) é nulo, e tira-se, da equação (9), que: $m = 0$

Substituindo este valor na equação (24) virá a seguinte expressão de T

$$T = e^{-K^2 \alpha t} \left[B_1 (Kr)^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(Kr) + B_2 (Kr)^{-1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(Kr) \right] \left[B_3 P_n^0(\cos\theta) + B_4 Q_n^0(\cos\theta) \right] \tag{57}$$

10.3 Regime estacionário

Neste caso, o termo $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ na equação (3), é nulo e conclui-se da equação (6), que:

$$K = 0$$

Recordemos que a nota apresentada em 5.1 se refere precisamente a este caso. Torna-se portanto necessário deduzir R (r) para $K = 0$.

A equação (16) com $K = 0$ vem

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R}{d r} - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0 \quad (58)$$

Esta equação é conhecida por equação de Euler-Cauchy (ver [2]). A sua integração é imediata após a mudança de variável $r = e^v$

O resultado da integração é:

$$R(r) = A_3 r^n + A_4 r^{-n} \quad (59)$$

Substituindo $k = 0$ e (59) na expressão de T, virá:

$$T = [A_1 \cos m \phi + A_2 \sin m \phi]\,[A_3 r^n + A_4 r^{-n}]$$
$$[A_5 P_n^m (\cos \theta) + A_6 . Q_n^m (\cos \theta)] \quad (60)$$

Se o regime for estacionário e houver simetria axial a expressão de T ainda é mais simples

$$T = [B_1 r^n + B_2 r^{-n}]\,[B_3 P_n^o (\cos \theta) +$$
$$+ B_4 Q_n^o (\cos \theta)] \quad (61)$$

11. EXEMPLOS

Exemplo 1 — Regime transiente numa esfera

Este problema é tratado em [1].

As condições aos limites que vão ser consideradas são:

$$\begin{cases} T = f(r, \theta, \phi) & \text{para } t = 0 \quad (62) \\ T = 0 & \text{» } r = R_1 \quad (63) \end{cases}$$

A temperatura T estende-se como temperatura relativa à da superfície da esfera.

Como $r = 0$ e $\cos \Theta = 1$ pertencem ao domínio a expressão de T simplifica-se (ver 10.1).

As funções próprias terão então a forma:

$$T_{ije} = e^{-K_i^2 \alpha t} (K_i r)^{-1/2} J_{n_e + \frac{1}{2}} (K_i r)\, P_{n_e}^{mj} (\cos \theta)$$

$$[A_{ije} \cos m_j \phi + B_{ije} \sin m_j \phi]$$
$$i, j, e = 0, 1, 2, 3 \ldots . \quad (64)$$

A condição (63) será imediatamente satisfeita se os K_i forem tais que:

$$J_{n + \frac{1}{2}} (K_i R_1) = 0 \quad (65)$$

Portanto, se os K_i forem as raízes da equação (65) às condições fronteiras são satisfeitas.

Adoptando os K_i dados por (65), resta satisfazer as condições iniciais, mas para isso temos grande liberdade uma vez que não particularizamos ainda os valores de m_j, n_e, A_{ije} e B_{ije}.

Vamos impor que m_j e n_e tomam os valores $m_j, n_e = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (com $m_j < n_e$) e os A_{ije} vão ser determinados de forma que (62) seja satisfeita, o que veremos é sempre possível.

Virá então para T o valor (*)

$$T = \sum_{imn} T_{imn} = \sum_{imn} e^{-K_i^2 \alpha t} (K_i r)^{-1/2} J_{n + \frac{1}{2}} (K_i r)$$

$$P_n^m (\cos \theta)\,[A_{imn} . \cos m \phi + B_{imn} \sin m \phi] \quad (66)$$

Na expressão (66) falta determinar os valores de A_{imn} e B_{imn} que, como se disse, serão calculados a partir da condição (62). Aplicando então (66) ao instante $t = 0$, virá:

$$f(r, \phi, \theta) = \sum_{imn} (K_i r)^{-1/2} J(K_i r) P_m^n (\cos \theta)$$

$$[A_{imn} \cos m \phi\ B_{imn} \sin m \phi] \quad (67)$$

Multiplicando ambos os membros de (67) por $\cos m \phi$ e integrando em ordem à variável ϕ, entre os limites de integração o e 2π, vem:

$$\int_o^{2\pi} f(r, \phi, \theta) \cos m\phi\, d\phi =$$
$$= \pi \sum_i \sum_n (K_i r)^{-1/2} J_{n + \frac{1}{2}} (K_i r)\, P_n^m (\cos \theta) . A_{imn} \quad (68)$$

atendendo às relações de ortogonalidade

$$\int_o^{2\pi} \cos p\phi \sin q\phi\, d\phi = 0 \qquad (p, q = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$\int_o^{2\pi} \cos p\phi \cos q\phi\, d\phi = \begin{cases} o & (q \neq p) \\ \pi & (p = q) \end{cases} \quad (p, q = 1, 2 \ldots)$$

(68) é válida só para $m \neq 0$; para $m = 0$, o 2.º membro deve ser multiplicado por 2.

O processo de obter B_{imn} é idêntico, basta

* Nota: libertámo-nos dos índices j e δ, e substituímo-los por m e n, porque adoptámos para valores próprios (m e n) os números inteiros positivos.

substituir em (68) o valor de cos m ϕ por sin m ϕ.

Se ambos os membros de (68) forem multiplicados por $P_n^m(\cos\theta)$ e ambos integrados em ordem a $\cos\theta$ entre -1 e 1, teremos

$$\int_{-1}^{1} P_n^m \, d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} f(r,\theta,\phi) \cos m\phi \, d\phi =$$

$$= \frac{2\pi (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \sum_i A_{imn} (K_i r)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(K_i r) \tag{69}$$

de acordo com as relações de ortogonalidade (56).

O mesmo pode ser feito com a função $(K_i r)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(K_i r)$, recorrendo às relações bem conhecidas da teoria das funções de Bessel

$$\int_0^a \left\{ r J_s(\alpha r) \right\}^2 dr = \frac{a^2}{2} \left\{ J'_s(\alpha a) \right\}^2$$

$$\int_0^a r J_s(\alpha r) J_s(\beta r) \, dr = 0 \qquad (\beta \neq \alpha)$$

Multiplicando então ambos os membros de (69) por $r^{3/2} J_{n+\frac{1}{2}}(K_i r)$ e integrando entre O e R, virá:

$$\int_0^{R_1} r^{3/2} J_{n+\frac{1}{2}}(K_i r) \, dr \int_{-1}^{1} P_n^m(\cos\theta) \, d(\cos\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\phi) \cos m\phi \, d\phi =$$

$$= \frac{\pi R_1^2 K_i^{-1/2} \left| J'_{n+\frac{1}{2}}(K_i R) \right|^2 (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} A_{imn} \tag{70}$$

Para os K_i dados por (65) e m, n = 0, 1, 2, . . . com m $\leqslant$ n.

Resta acrescentar que se $f(r,\theta,\phi)$ é contínua, como se verifica nos problemas de transmissão de calor, é sempre possível desenvolvê-la numa série do tipo (67).

Ficou esclarecida a razão porque as funções Q_n^m não ocorrem vulgarmente na literatura sobre condução de calor. Efectivamente, uma das razões é o facto de, regra geral, o domínio conter pontos onde $\cos\theta = \pm 1$ e a outra é o de P_n^m conseguirem por si reproduzir as condições fronteiras. No entanto, por vezes, é conveniente recorrer aos Q_n^m para evitar resultados sob a forma de séries infinitas, como se verá no exemplo seguinte.

Exemplo 2 — Viscosímetro de placa e cone

O problema é indicado em [10]; estes autores resolvem-no por um método diferente, mas sugerem a resolução aqui apresentada.

O viscosímetro de placa e cone está representado esquemàticamente na Fig. 5.

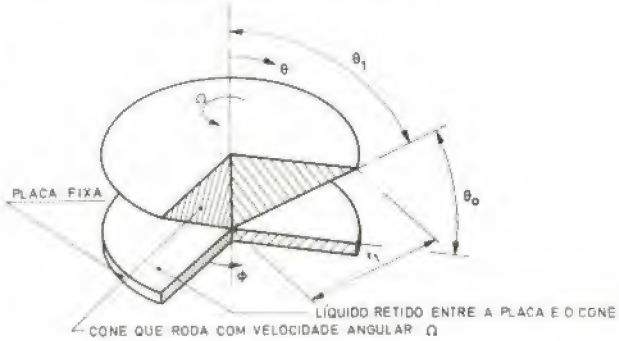


Fig. 5

As quantidades que são medidas em cada ensaio são a velocidade angular Ω e o binário M necessário para manter o regime estacionário. A grandeza que se pretende determinar é, evidentemente, a viscosidade μ do fluido.

Este aparelho tem sido muito utilizado em ensaios laboratoriais com fluidos não Newtonianos. As vantagens do aparelho residem na possibilidade e relativa precisão das medidas e na possibilidade de eliminação dos efeitos de extremos.

A análise que segue será feita nas seguintes hipóteses:

1) Fluido Newtoniano incompressível de viscosidade μ constante.

2) Regime estacionário

3) Regime laminar com escoamento completamente tangencial

$$v_r = v_\theta = 0 \text{ e } v_\phi \neq 0$$

4) Escoamento muito lento («creeping flow») corresponde a desprezar os termos onde entra v_ϕ^2 relativamente aos restantes.

Introduzindo as hipóteses 1), 2), 3) e 4) nas equações de Navier-Stokes expressas em coordenadas esféricas [ver Tabela 3, 4-4 de [10], virá:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\sigma v_\phi}{\sigma\theta}\right) - - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} = 0 \qquad (71)$$

As condições aos limites a respeitar são:

$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_\phi = 0 \qquad (72)$$

$$\theta = \theta_1 \longrightarrow v_\phi = r\,\Omega \sin\theta_1 \qquad (73)$$

A equação (71) não é do mesmo tipo que a do calor, no entanto vamos ver que a aplicação do método de separação de variáveis conduz a equações do tipo das que estudámos.

Admitamos então que

$$v_\phi = R(\pi)\,\Theta(\theta).$$

Substituindo em (71) e dividindo por R Θ, vem

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - - \frac{1}{\sin^2\theta} = 0 \qquad (74)$$

Podemos então escrever:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = n(n+1) \qquad (75)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \qquad (76)$$

$$n = \text{constante}$$

A equação (75) é a mesma que (58) e (76) é idêntica a (13) com m = 1.

R (r) será dado por (59):

$$R(r) = K_1 r^n + K_2 r^{-n}$$

como o ponto r = 0 pertence ao domínio $K_2 = 0$.

$$R(r) = K_1 r^n \qquad (77)$$

A solução de (76) é a que se indica em 6.2, com m = 1

$$\Theta(\theta) = K_3 P_n^1(\cos\theta) + K_4 Q_n^1(\cos\theta) \qquad (78)$$

v_ϕ terá a forma:

$$v_\phi = r^n\left[K' P_n^1(\cos\theta) + K'' Q_n^1(\cos\theta)\right] \qquad (79)$$

Sustituindo $\theta = \theta_1$ nesta expressão teremos:

$$v_\phi\Big|_{\theta=\theta_1} = r^n \times C^{te}$$

Para que este valor seja compatível com a condição (72), terá de ser

$$n = 1 \qquad (80)$$

v_ϕ será então dado por

$$\frac{V_\phi}{r} = K' P_1^1(\cos\theta) + K'' Q_1^1(\cos\theta) \qquad (81)$$

ou seja de acordo com as espressões dadas em 9.3

$$\frac{v_\phi}{r} = K'\sin\theta + K''\left[\frac{1}{2}\sin\theta\log\frac{\cos\theta+1}{1-\cos\theta} + + \operatorname{cotg}\theta\right] \qquad (82)$$

A condição fronteira (72) conduz a

$$K' = 0 \qquad (83)$$

Inpondo a v_ϕ a condição (73) vem:

$$\frac{v_\phi}{r} = \Omega\sin\theta_1 \cdot \left[\frac{\operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\sin\theta}{\operatorname{cotg}\theta_1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\right)\cdot\sin\theta_1}\right] \qquad (83)$$

Obtido o perfil de velocidades é fácil obter a expressão do binário aplicado:

A tensão do corte $\tau_{\theta\phi\,|\,\theta=\frac{\pi}{2}}$ é dada por (ver [10]):

$$\tau_{\theta\phi\,|\,\theta=\frac{\pi}{2}} = -\mu\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} \qquad (84)$$

o binário M é determinado por:

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \tau_{\theta\phi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} r^2 \, d\, r \qquad (85)$$

Feitos os cálculos vem, (ver [10]):

$$M = \frac{4\pi r_1^3 \mu \Omega \sin\theta_1}{3\left[\cot g\,\theta_1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\right) \cdot \frac{\quad}{\sin\theta_1}\right]} \qquad (86)$$

Que permite calcular μ sabidos M e Ω.

NOMENCLATURA

a_i — constantes definidas por (41)
A — contorno de integração
$A_1, A_2 \ldots A_6$ — constantes multiplicativas
$A_{1\,ije} \ldots A_{6\,ije}$ — constantes indiciadas que ocorrem nos desenvolvimentos em série
B — contorno de integração
$B_1, B_2 \ldots B_4$ — constantes multiplicativas
C — contorno de integração
c — velocidade da luz
$C_1, C_2 \ldots C_7$ — constantes multiplicativas
C_1', C_2' — constantes multiplicativas
D — contorno de integração
$f(\sigma)$ — função qualquer contínua
$f_{n-1}(\sigma)$ — polinómio em σ de grau $n-1$
$f(r,\theta,\phi)$ — temperatura inicial na esfera
$J_{n+\frac{1}{2}}, J_{-n-\frac{1}{2}}$ — funções de Bessel de 1.ª espécie
$J'_{n+\frac{1}{2}}(K_1 r)$ — derivada de $J_{n+\frac{1}{2}}$ em ordem a r
k — constante de separação e valor próprio
$K_1 \ldots K'_4, K''$ — constantes
m — constante de separação e valor próprio
M — binário
n — constante de separação e valor próprio
P_n — função de Legendre de 1.ª espécie
P_n^m — função associada de Legendre de 1.ª espécie
Q_n — função de Legendre de 2.ª espécie
Q_n^m — função associada de Legendre de 2.ª espécie
r — coordenada esférica
R — função só de r
r_1 — comprimento da geratriz do cone
R_1 — raio da esfera
T — temperatuta
t — tempo
u — definido por $u = k\,r$
U — definido por $U = u^{1/2} R$
υ — definido por $r = e^{\upsilon}$
v_r, v_Θ, v_ϕ — componentes da velocidade
x — coordenada cartesiana
X — função só de σ
y — coordenada cartesiana
z — coordenada cartesiana e variável complexa

LETRAS GREGAS

α — difusividade técnica
δ — infinitésimo
θ — coordenada esférica
θ_1 — semi-abertura do cone
Θ — função só de θ
μ — viscosidade
Ω — velocidade angular
$\sigma = \cos\theta$
τ — função só de t
ϕ — coordenada esférica
Φ — função só de ϕ
ψ — definido por $\psi = \frac{d^m X}{d\,\sigma^m}$

INDÍCES

i, j, e, m, n, p, q, s

REFERÊNCIAS

[1] H. S. Carslaw e J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Claredon Press, 2.ª ed, 1959.
[2] L. A. Alves, Folhas de Cálculo Infinitesimal, ed. AEIST, 1958-59.
[3] E. T. Whittaker e G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge Un. Press, 4.ª ed 1965.
[4] R. Courant e D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. I, Interscience, 1965.
[5] E. T. Copson, An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford, 1957.
[6] P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, vol. I e II, Mc Graw-Hill, 1953.
[7] I. N. Sneddon, Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, Oliver and Boyd, 1956.
[8] C. Fernandes, Folhas de Análise Superior, ed. AEIST, 1956.
[9] H. Bateman, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, Un. Press, 1964.
[10] R. B. Bird, W. E. Stewart e E. N Lightfoot, Transport Phenomena, J. Wiley, 1962.

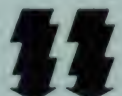
AGRADECIMENTO

O autor agradece às pessoas presentes no colóquio a atenção prestada durante a exposição e os oportunos comentários, que permitiram tornar mais claros alguns pontos da matéria.

TELEFONBAU UND NORMALZEIT GMBH

A TELEFONBAU NORMALZEIT
FABRICA:
EQUIPAMENTO DE COMUTAÇÃO PARA REDES PÚBLICAS E PARTICULARES (CENTRAIS, PPC E PPCA)
CENTRAIS PRIVATIVAS AUTOMÁTICAS
TELEFONES DE MESA, PAREDE, ESTANQUES E ANTIDEFLAGRANTES
CENTRAIS TELEX

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS Lda.



Av. duque d'avila, 66-3.º telef. 41161/5 LISBOA

aglomerado negro de cortiça

leve, resistente e isolante

ideal para elementos pré-fabricados

ISOLA

SOC. COM. DE ISOLAMENTOS

DE CORTIÇA, Lda

Avenida António Augusto de Aguiar, 17

Telef. 537191/2/3/4

LISBOA — PORTUGAL

LISNAVE

ESTALEIROS NAVAIS DE LISBOA, S.A.R.L

Direcção Geral 67 70 21 (8 linhas) — Estaleiro da Rocha (concessionário da A.G.P.L.) 67 50 61 (8 linhas): 67 61 71 (8 linhas)
Estaleiro da Margueira 276 11 21 · Ender. Teleg. LISNAVE-LISBOA · Apartado 2138

2 estaleiros no porto de Lisboa

ROCHA
EM FUNCIONAMENTO DESDE 1899

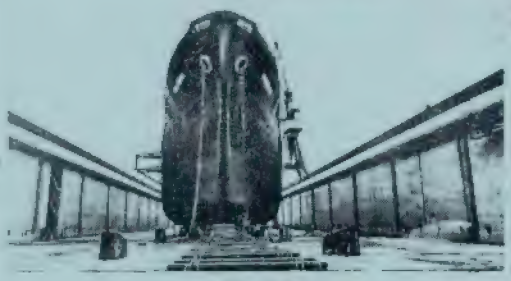
4 DOCAS SECAS
PARA NAVIOS ATÉ 18 000 T. D. W.

2 CARREIRAS DE CONSTRUÇÃO
PARA NAVIOS ATÉ 5000 gr. t.

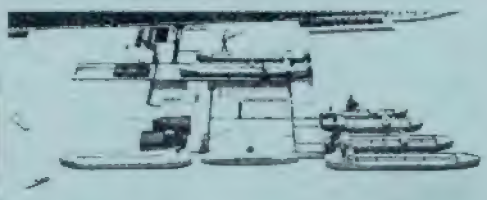
MARGUEIRA
EM FUNCIONAMENTO A PARTIR DE 1967

2 DOCAS SECAS
PARA NAVIOS ATÉ 300 000 T. D. W.

ESTAÇÃO DE LIMPEZA DE TANQUES DE NAVIOS PETROLEIROS



«PRAIA BRANCA»
Primeiro navio docado no novo Estaleiro da Margueira



ESTALEIRO DA MARGUEIRA
(Em construção)

Resumos dos artigos publicados na Técnica n.º 368

Ano XLII — Maio 1967

MANUEL GARRIDO CDU 621.313

Les liaison internes des machines electriques à commutation

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pág. 391-400.

Mostra-se como estabelecer as equações gerais das máquinas eléctricas de comutação, tendo em consideração as secções em comutação e como estabelecer um modelo equivalente à máquina real no qual os efeitos das correntes de comutação sejam desprezáveis.

PERES RODRIGUES C. D. U. 624.131.25 : 624.131.376

Recta de Coulomb mais provável obtida por ensaios triaxiais de rotura

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pág. 415-418.

Descreve-se um método de cálculo, baseado no método dos mínimos quadrados, para a determinação da recta de Coulomb mais provável obtida a partir dos resultados de ensaios triaxiais de rotura efectuados sobre cilindros de um mesmo material. Apresenta-se um exemplo numérico

G. MATHERON UDC 519 : 622.1

Presentation des variables régionalisés

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pág. 401-413.

O autor apresenta, numa 1.ª parte, uma exposição sobre as representações transitivas das variáveis regionalizadas com referência especial ao covariograma transitivo e sua significação estrutural. Indica-se o cálculo da variância de estimação associada a uma malha de amostragem, e faz-se uma aplicação à estimação de uma área mineralizada. Numa 2.ª parte, indica-se a representação das variáveis regionalizadas por esquemas intrinsecos, com referências especial ao variograma intrinseco e sua significação estrutural. Indica-se o cálculo das variâncias de extensão, e dão-se às fórmulas gerais e métodos de cálculo da variância de estimação associada a uma rede de trabalhos de reconhecimento.

REBELO SIMÕES
CABRAL DA FONSECA
ANTÓNIO DE MELLO C. D. U. 534.44 : 534.781

Espectro e distribuição da fala

Tecnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pág. 419-427.

Apresentam-se alguns resultados experimentais sobre o espectro de potência e a distribuição de amplitude da fala. As experiências foram realizadas com registo em fita magnética de voz humana (uma voz e várias vozes simultâneamente). Estas experiências destinam-se a analisar o comportamento da fala como processo estocástico, no que diz respeito à validade de um modelo gaussiano estacionário, para efeitos de extracção de sinais no meio do ruído.

Synopsis of articles published in «Técnica» nº 368

XLII — May 1967

Peres Rodrigues UDC 624.131.25 : 624.131.367

The most probable Coulomb's straight-line from the result of trixial failure tests

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pp. 415-418.

The author describes a procedure, based on the method of least squares, for determining the most probable Coulomb's straight-line from the results of triaxial failure tests obtained in cylinders of one and the same material. A numerical instance of the method is presented

Manuel Garrido UDC 621.313

Internal connections of electric commutator machines

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pp. 391-400.

It is shown how to establish the general equations of commutator machines, including in the analysis the commutating coils and how to establish an equivalent model where the effects of commutating currents are negligeable.

Rebelo Simões
Cabral da Fonseca
António de Mello UDC 534.44 : 534.781

Spectrum and distribution of speech

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pp. 419-427.

Some experimental results are presented on power spectrum and amplitude distribution of speech.
The experiments were carried on with magnetic tape records of human voice (one voice and several simultaneous voices).
These experiments are intended to analyse the behaviour of speech as a stochastic process, as far as concerns the validity of a stationary gaussian model for signal extraction purposes.

G. Matheron UDC 519.622.1

Apresentation of the regionalized variables

Técnica No. 368 — XLII — 5. 1967, pp. 401-413.

The author presents, in a first part, a study on the transitive representation of the regionalized variables; with a special reference to the transitive covariogramm and its structural meaning. A computation of the variance of estimation associated to a sampling net is shown, with an example of the estimation of a mineralized area.
In a second part, the representation of the regionalized variables by probabilistic schemes is indicated, with a special reference to the intrinsec variogramm and its structural meaning. Also shown is the calculation of the variances of extension, as wellas the general formulae and calculation methods of the variance of estimation associated to an exploration work's net.

BIBLIOTECA
FICHEIRO

Classificadores responsáveis:

Duarte Cunha, Silva Casimiro, Tavares Pires

Recortar as indicações bibliográficas que formam uma ficha e estão encimadas por CDU (Classificação Decimal Universal).

Colar cada referência num pequeno rectângulo de cartolina de 75 × 125 mm.

Ordenar pelos índices decimais, *começando da esquerda para a direita,* independentemente do número de algarismos que o índice contiver, e respeitando a seguinte regra de arrumação dos sinais auxiliares:

+ / n.os simples : [ ] = (01/09) (1/9) (=) " "A/Z — .0 .00

Consultar, em casos duvidosos, a exemplificação inserida na «Técnica» n.º 218 e seguintes, ou recorrer à Biblioteca da A. E. I. S. T.

Notar que a inserção das fichas nesta publicação respeita a ordem correcta, no intuito de a esclarecer o mais possível.

A comodidade de possuir no próprio local de trabalho um arquivo ordenado e de fácil consulta sobre assuntos que se sabe onde existem, é uma das evidentes vantagens de um ficheiro classificado segundo a CDU.

Os assuntos de que estas fichas são referência ficam patentes à consulta a partir desta data.

ARTIGOS DE REVISTAS

C. D. U. 535.1/530.12

Modern phisics and o ballistic theory of light — *R. A. Waldron.*

Electronics & Power, 11-966, vol. 12, pág. 394.

O artigo trata de uma possível explicação dos resultados da física moderna, à luz duma teoria balística das radiações electromagnéticas e das implicações desse facto para a comprovação experimental do princípio relativista da invariância da velocidade da luz.

C. D. U. 543.422.4 : 678.68

Utilisation de la spectrographie infrarouge pour l'étude du mécanisme de durcissement des résines époxydes — *Serboli G.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 8, págs. 590-597, 11 fig., 8 ref. bibl.

O autor explica como a espectrografia infravermelha permite seguir simplesmente pelo menos as principais reacções.

C. D. U. 546.287 : 541.44

Organosilicon compounds XLIII. The effect of oxygenous substituents on alkaline solvolysis of organosilicon hydrides — *J. Hetflejs, F. Mares e V. Chvalovsky.*

Collection Czechoslov. Chem. Commun., 2-966. vol. 31, n.º 2, págs. 586-601.

Mediram-se as constantes de velocidade da solvólise alcalina, da ligação Si-H, de silanos trisubstituídos, $R_n (CH_3)_{3-n} Si H$ [Em que $R = (CH_3)_3 SiO -$, $(CH_3)_3 CO -$, $(CH_3)_3 CCH_2 -$; n = 0 a 3], $[(CH_3)_3 SiO]_n C_2 H (CH_3)_{2-n} Si H$ (n = 0 a 2) e $(C_2 H_5 O)_n$ a $(C_3 H_7)_{3-n} Si H$ (n = 0 a 3). Os resultados da solvólise de silanos com substituintes oxigenados não podem ser explicados só em termos de efeitos polares ou estereoquímicos dos substituintes. O artigo apresenta uma discussão das razões possíveis para os desvios notáveis da dependência esperada entre a reactividade das ligações Si-H e a estrutura dos compostos. Interpreta-se a reactividade dos neopentil-alquilsilanos como resultado do efeito +I e do efeito estereoquímico do grupo neopentilo.

C. D. U. 548

La cristallographie en France — *H. Curien.*

Informations Scientifiques Françaises, 7-8-966, vol. 3, pág. 129.

Embora se trate duma análise de trabalho feito neste domínio em França, apresentam-se alguns dados de interesse sobre o assunto.

C. D. U. 621-135 : 532.5

Distribution des vitesses dans un étage de turbine, pour un fluide compressible, dans le cas de profils de vitesses identiques à l'entrée et à la sortie — *Ott H. H.*

Rev. Brown Boveri, t. 51 (1964), n.º 12, p. 735-751.

Apresenta-se um método aproximado para determinação das velocidades num andar de turbina, para um fluido compressível, no caso de serem dadas as direcções de escoamento e a velocidade axial média no eixo do canal à entrada e à saída. Obtém-se igualmente o alargamento cónico do andar, o coeficiente do andar, o coeficiente matemático e ondulação da corrente e o grau de reacção.

Topografia Geral

1.° e 2.° Volume

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

Nova edição revista

e

actualizada

Preço de cada volume

150$00

•

Desconto: 10% aos assinantes

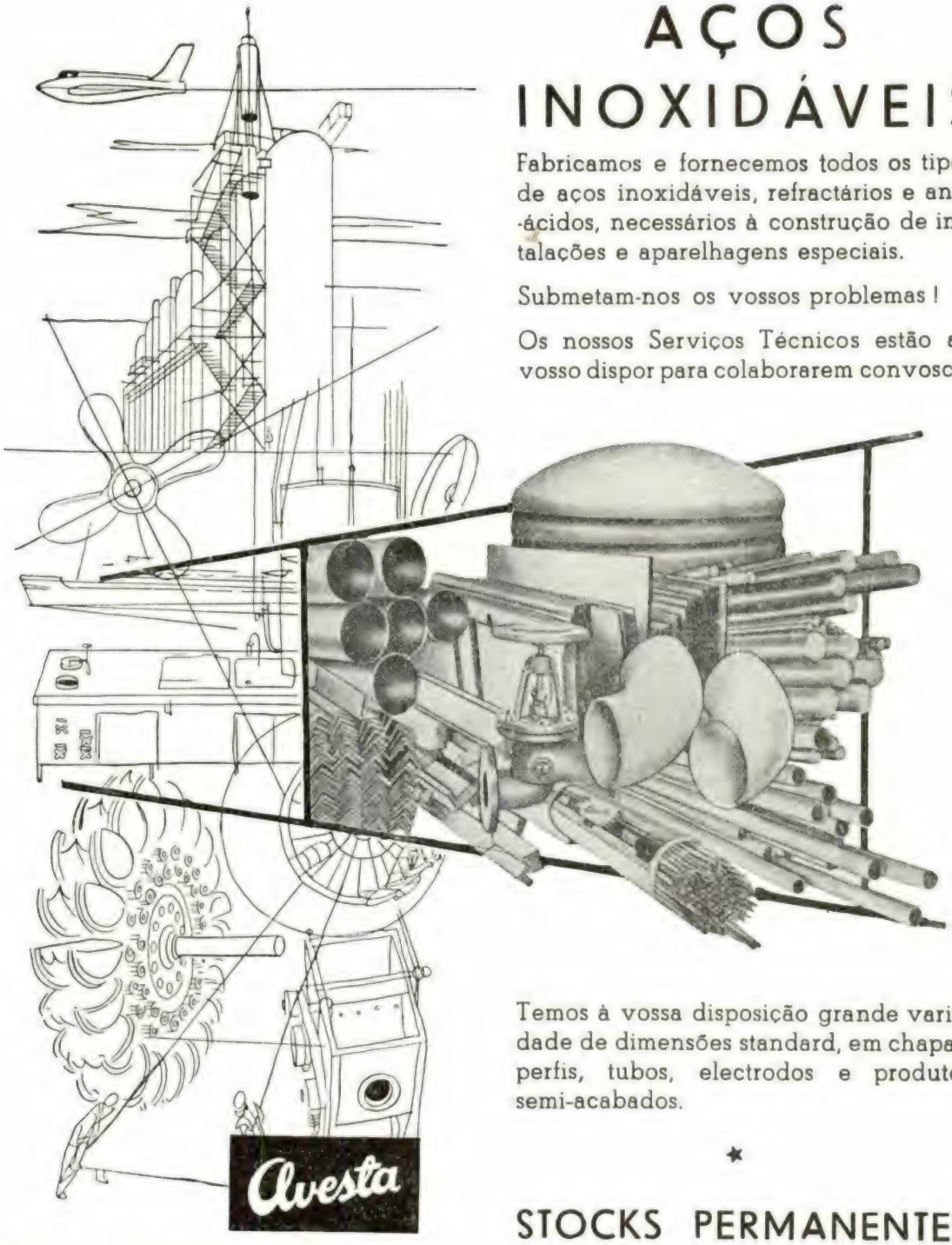
Pedidos à Técnica

AÇOS INOXIDÁVEIS

Fabricamos e fornecemos todos os tipos de aços inoxidáveis, refractários e anti-ácidos, necessários à construção de instalações e aparelhagens especiais.

Submetam-nos os vossos problemas!

Os nossos Serviços Técnicos estão ao vosso dispor para colaborarem convosco.



Temos à vossa disposição grande variedade de dimensões standard, em chapas, perfis, tubos, electrodos e produtos semi-acabados.

★

STOCKS PERMANENTES

AVESTA JERNVERKS AKTIEBOLAG
AVESTA — SUÉCIA

Representantes Exclusivos para Portugal e Ultramar:

A. JOHNSON & Co (PORTUGAL), L.DA

SEDE EM LISBOA:
Praça José Fontana, 11-1.º
Telef. 537015-537016-537017-537018

FILIAL NO PORTO:
R. Dr. António Granjo, 160/168
Telef. 54666

C. D. U.—621—83

Oli Equipaggiamenti Elettrici dei Blondin di Contro — *L. Terenghi.*

Marelli, 1-3-966, Ano XL, n.º 1-3, pág. 15-31.

C. D. U. 621.3.077.6

Systèmes de commande en temps minimal — *T. Raddeus A. Hawkes.*

Automatisme, 4-966, XI, n.º 4, pág. 237.

Fez-se um estudo matemático dos sistemas de comando em tempo mínimo, caracterizados por o respectivo relais dar lugar à aplicação dum esforço constante sempre que há desvio e não de um esforço proporcional ao desvio.

C. D. U. 621.314.22.08:621.315.616.97

Raisons pour lesquelles la résine synthétique moulée convient particulièrement bien à la construction des transformateurs de mesure à haute tension — *Hartmann H. et C. Musy.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 8, p. 598 à 608, 10 fig., 2 tabl.

Os autores expõem as propriedades mecânicas e eléctricas da resina sintética e mostram como se deve proceder para determinar a forma mais favorável dos transformadores.

C. D. U. 621.316

La rete italiana a 400 kv — *Marcolini et al*

Marelli, 9-966, XL, n.º 7-9.

Trata-se de uma série de artigos relacionados com o projecto de transformadores de poténcia e de auto-transformadores destinados à rede italiana de 400 kv.

C. D. U. 621.316.311

Compte-rendu complet du colloque sur l'énergie eléctrique dans les industries: solutions modernes de livraision de répartition et de continuité de l'alimentation des machines

Le Journal de l'equipement électrique et électronique, 9-66, n.º 260, pág. 83.

C. D. U. 621.316.57.064.45 : 534.283.2

Atténuation du bruit provoqué par les disjonteurs pneumatiques — *Schubert H. et W. Meinzinger.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 8, pág. 628-640, 14 fig., 21 ref. bibl.

Descrevem-se os resultados dos ensaios feitos com um dispositivo atenuador.

C. D. U. 621.316.9

Las sobretensiones en las redes — *Ing. Juan Alberto Turpain.*

Ingenieria e Industria, 8-966, n.º 375, pág. 58-65.

Faz-se uma análise breve das sobretensões, sobretudo de origem atmosférica, nas linhas de transmissão de energia e dos seus efeitos no equipamento de protecção.

C. D. U. 621.39

Étude d'un corrélateur analogique de bande passante 20 Hz-20 000 Hz et de retard réglable continuement de 0 a 0,1 seconde — *Robert Herné.*

Nota Técnica 103 (1966) do Office National d'études et de recherches aerospatiales».

A originalidade do correlacionador analógico descrito reside na utilização dum sistema de atraso contínuo variável associado a um sistema por pontos. Uma tal solução permite a definição de funções de autocorrelação de grandes atrasos e de funções de correlação usadas a partir dum valor inicial importante e preciso.

Depois de uma rápida recapitulacão das propriedades das funções aleatórias e da descrição de alguns correlacionadores existentes, um estudo da solução adoptada na O.N.E.R.A. precisa as características do dispositivo.

A realização dum aparelho simplificado permitiu uma verificação do princípio e a resolução de alguns problemas práticos.

C. D. U. 621.316.925 45

Un nouveau relais de distance pour réseaux à moyenne tension — *Weber P.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 4, pág. 297-309, 12 fig. 2 tabl.

O relé descrito está previsto para a protecção de cabos e linhas aéreas de média tensão.

C. D. U. 621.436.052

Suralimentation à deux étages — *Meier E.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 3, pág. 171-179 9 fig., 3 ref. bibl.

O autor expõe as vantagens de utilizar dois grupos em que os compressores, por um lado, e as turbinas por outro, são associados em série. Expõe as possibilidades do método de sobrealimentação, vantagens e inconvenientes, baseando-se em estudos teóricos e resultados de ensaios.

C. D. U. 621.436.052 : 534.1

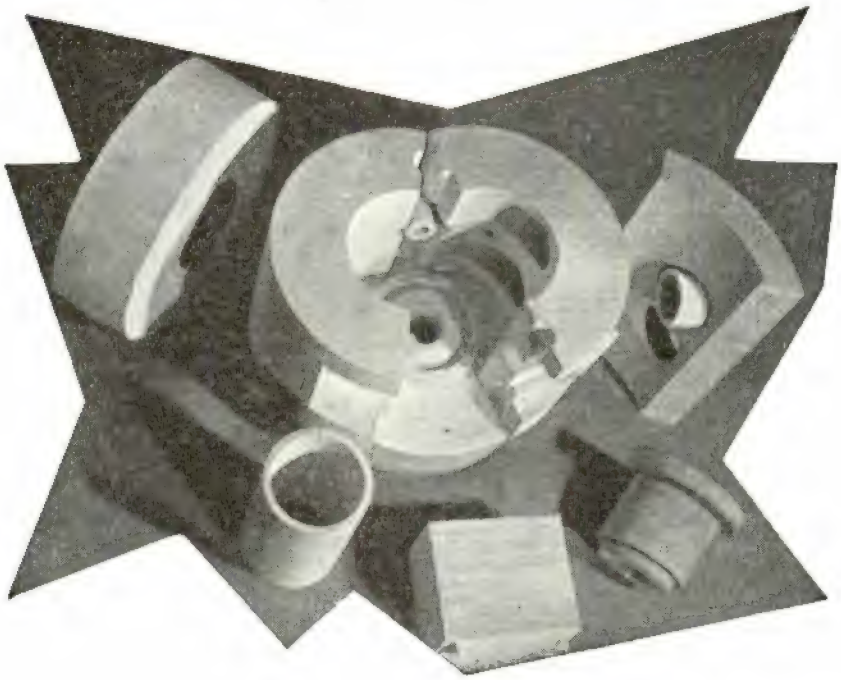
Oscillations apparaissant dans les conduites d'air des diesels suralimentés — *Ryti M.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 3, pág. 190-203; 11 fig., 1 tabl., 13 réf. bibl.

As oscilações susceptíveis de reproduzir nas condutas de ar dos motores Diesel sobrealimentados podem prejudicar o bom funcionamento do compressor. O autor descreve um método de cálculo que permite determinar o comportamento duma conduta de ar no que diz respeito a certas oscilações.

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C
REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO, L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

C. D. U. 621.436.052 : 621.515

Essais effectués sur un compresseur centrifuge de groupe de suralimentation — *Linsi U.*

O autor expõe e discute os resultados de ensaios efectuados com um compressor centrífugo. Indica como se podem determinar separadamente os rendimentos da roda e do difusor.

C. D. U. 629.113.536.46

Advances in automobile engineering, part four — *D. Hodgetts.*

1-966, vol. 1, pág. 200.

C. D. U. 656.254

Transmission linéaire d'informations voie/véhicule moteur por haute fréquence. — *Friedmann W. Peltzer N.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 9-10, pág. 752-760 ; 15 fig.

C. D. U. 658.003 : 621.74

Desenvolvimento económico e estrutura da empresa — uma tentativa de conciliação — *Armando A. Correia.*

Fundição — Revista A. P. F, n.º 15, 1967, pág. 9.

O autor expõe duma maneira genérica os princípios económicos ligados com a produção industrial e faz um resumo das condições de trabalho da indústria portuguesa de fundição. Apresenta o exemplo da FUMBRAL, tentiva de concentração das produções fragmentárias de algumas pequenas fundições da região de Braga, mostrando as vantagens decorrentes do aumento de dimensão existente na unidade industrial nova.

C. D. U. 664.87 : 635.64.003

Estúdio económico de la fabricación de concentrado de tomate (continuacion) — *J. M. Garrido.*

11-966, vol. 26, n.º 304, pág. 641-653.

C. D. U. 669.046.58: 669.054

Miniature scale electroslag refining — *P. Dewsnap*

Metalurgie, 6-966, 73, n.º 440, pág. 257/259.

A refinação electrolítica das escórias é um processo no qual um eléctrodo de aço é fundido por meio duma escória fundida num molde ou cadinho arrefecido. A escória é aquecida por passagem duma corrente eléctrica. Trata-se fundamentalmente dum processo químico sendo necessário um conhecimento das suas potencialidades para poder ser realizado. A unidade de refinação B.I.S.R.A. aqui descrita tem finalidade investigar os princípios que governam as refinações das escórias usadas.

C. D. U. 669.131.6: 539.56

Exemplos de fracturas em peças de fundição. Incidência das características estruturais — *A. V Seabra.*

Memórias — LNEC, n.º 284

Apresenta-se uma breve exposição sobre a influência da constituição da matriz e de quantidade e tipo de grafite nas propriedades mecânicas do ferro fundido cinzento e consequentes aplicações.

Seguem-se alguns exemplos de peças em ferro fundido cinzento que sofreram rotura, expondo-se e justificando se as respectivas causas.

Como conclusão, ressalta-se que para a obtenção de peças em boas condições de utilização e segurança se deverá atender ao conhecimento tão completo quanto possível das solicitações a impor à peça, à escolha e especificação do material e a uma aplicação cuidada.

Em anexo, junta-se a tradução da recomendação elaborada pela «Comission International des Méthodos d'essaios des-fentes» do C.I.A.T.F, para definição da grafite no ferro fundido cinzento.

C. D. U. 669.14.018.822

The effects of the continuing reduction of carbon content in austenic stainless steels — *I. D. G. Berwick.*

Metallurgie 5-966, vol. 73, n.º 439 pág. 218-222.

Com o decorrer dos anos há uma redução progressiva do conteúdo de carbono dos aços austeníticos inoxidáveis, o que leva ao desenvolvimento de aços tipo r8/8, virtualmente imunes a desintegração intergranular. Neste artigo o autor discute o efeito desta redução de carbono em aços estabilizados e não estabilizados do ponto de vista de estrutura, processo de fabrico, propriedades mecânicas e resistência à corrosão.

C. D. U. 669.14.018.822.001.5 «1965»

Stainless Steel in 1965 — Some aspects ef research and technical progress reported — *E. Elliot.*

Metallurgia, 5-966, vol. 73, n.º 439, pág. 201-210.

Refere-se aos trabalhos publicados na Inglaterra e nos E.U.A., acerca do progresso da técnica e da investigação em vários aspectos da metalurgia do aço inoxidável, incluindo manufactura, tratamento térmico, fabricação e propriedades. Indicam-se ainda interessantes aplicações destes materiais.

C. D. U. 669.14

Aceros de gran maquinabilidad — *Palácios Reparez.*

Dyna, 10-969, n.º 10, pág. 541-560.

Este artigo indica um processo de medir a maquinabilidade de um aço, a analisar a influência de certos elementos como o S, o Pb e o Te na maquinabilidade. Foca igualmente a influência da deformação a frio na maquinabilidade.

CPFE

COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

Capital 60 MIL CONTOS S A R L

Largo de S. Carlos, 4 Lisboa · 2

C. D. U. 669.16 : 621.74

Adição de ferro-ligas as gusas de fundição — *Horácio Maia e Costa* e *Manuel A. Sanfins.*

Fundição — Revista A.P.F., n.º 15, 1967, pág. 17.

Os autores desta comunicação ao 1.º Congresso Nacional de Fundição explicam a maneira como um dos produtores nacionais de gusas resolveu o problema da satisfação de um mercado com exigências diversificadas mediante a correcção da composição de gusas produzidas a partir de minérios de ferro em fornos de redução. Esta correcção foi feita com a adição de ferro-ligas ao banho fundido, nomeadamente com ferro-sílicio, ferro-manganês e ferro-fósforo.

C. D. U. 677.31 : 677.84

The Dyeing of Wool — Part I — The nature of wool fibres and of wool dyes.

Wool Science Review, 8-966, n.º 30, pág. 1-9.

Refere-se este artigo à constituição química da lã, estrutura da fibra e acção da água sobre a lã. Em seguida dá nota de corantes tradicionais da lã, dos corantes ácidos, dos corantes complexos metálicos e dos corantes reactivos

C. D. U. 678.68

Les résines époxydes — *Knapp F.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 8, pág. 575-589, 2 fig., 3 tab., 42 ref. bibl.

O autor expõe as características destas resinas.

C. D. U. 681.14 : 621.398

L'installation de transmission de données et de téléaction, système DUFA — *Bechtiger K. G.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 5/6, pág. 400-414, 8 fig., 6 ref. bibl.

Expõem-se as diferentes possibilidades de utilização do sistema citado.

C. D. U. 681.14 : 621.771.2

Optimisation du tronçonnage dans un train continu à petits fers, à l'aide d'une calculatrice pour processus industriels type DP 200 — *Lautenschlager R. D.*

Rev. Brown Boveri, t. 52 (1965), n.º 5/6, pág. 387-396, 12 fig., 3 ref. bibl.

Este artigo apresenta a aplicação concreta dum calculador a um processo industrial de fabrico.

C. D. U. 681 : 621.003.2

Perspectivas de la industria argentina de máquinas herramienta

Ingenieria Industria, 12-16, n.º 371, págs. 49-58.

Informação apresentada no Simpósio Latino-Americano. Esta informação analisa o estado da indústria de Máquinas e Ferramentas na Argentina, seu grau de desenvolvimento e perspectivas possíveis para um mercado em plena expansão.

C. D. U. 69.002 : 69.003 (47) : 69.057.1

La fabrication industrielle de logements et autres constructions en Union Soviétique — *F. Noirot et H. Robin.*

Annales de l'I.T.B.T.P., Maio, 966, vol. 19.º Ano, n.º 221, págs. 483-506.

Relato de uma missão de estudos efectuada por técnicos franceses em Novembro de 1964 à U. R. S. S. Foca vários aspectos do problema de pré-fabricação de alojamentos: característica dos alojamentos, importância dos programas de construção, organização dos Institutos de investigação científica e tecnológica, a concepção dos elementos pré-fabricados e a sua fabricação e ainda estaleiros de montagem.

C. D. U. 691.328

Constructions composites et pré contraintes en Acier-béton. Realisations belges dans le domaine des ponts et des bâtiments — *A. Birguer.*

Annales de l' I T B T P, Maio, 966, vol. 19.º Ano, n.º 221, pág. 507-556.

C. D. U. 691.834 : 691.7[539.4.413 + 414]

Comportement des Tubes metalliques munis de fenêtres et soumis à flexion et torsion — *B. Fontaine.*

Acier-Stahl-Steel, 7-8-966, 31.º ano, pág. 351-354.

Baseando-se nos resultados de ensaios efectuados sobre 24 troços de postes eléctricos em aço 52, estabeleceram-se curvas de interacção (flexão-torsão) permitindo determinar o comportamento dos tubos sob a acção de uma solicitação composta (flexão + torsão) qualquer. Pode-se, com toda a segurança, adoptar um arco de círculo para as curvas de interacção. Dá-se um exemplo numérico.

C. D. U. 92 Deville : 54 : 669

Deville-Versatile chemist and metallurgist — *M. Schofield.*

Metallurgie 7-966, vol. 74, n.º 441, pág. 8-10.

Artigo biografico sobre o químico Henri St. Claire Deville. No campo da metalurgia recorda-se a sua acção na preparação de metais puros tais como o Cr e o Mn e na previsão de novos métodos de análise.

LISTA CLASSIFICADA DE ANÚNCIOS

Neste número continua a «Técnica» a sua secção de publicidade — a *lista classificada de anúncios* — destinada a facilitar a procura por parte dos clientes.

Estas páginas amarelas ficam abertas aos nossos leitores, que nelas podem anunciar a sua firma e endereço, ao preço de 50$00 por número. Quanto aos nossos anunciantes, é com muito gosto que lhes concedemos grátis a inscrição na lista.

CONSTRUÇÃO CIVIL

CONSTRUTORES CIVIS

— **Construções Técnicas, Lda.**
P. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Escodel**
Rua Ferreira Lapa, 42, 1.º D. — Lisboa.

— **Fundações Franki**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 73 41 12.

— **Soc. Const. Amadeu Gaudencio, Ld.ª**
R. Dr. Alexandre Braga, 4-A — Lisboa
Telef. 4 31 91 — 92 — 93.

— **Soc. de Pré-Fabricação e Obras Gerais Novobra**
Av. Estados Unidos da América, 100-5.º D
— Telef. 77 48 32 / 76 64 46 — Lisboa 5

ESCAVADORAS

— **Guedes & Almeida**
Rua Aurea, 181-2.º — Tel. 32 78 45 — Lisboa 2

— **S. T. E. T. — Soc. Técnica de Equipamentos e Tractores, Ld.ª**
Prior Velho — Sacavém — Tel. 2 51 00 01/4.

FUNDAÇÕES

— **Construções Técnicas, Lda.**
Pr. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ld.ª**
Av. da República, 42-8.º
— Telef. 77 70 86/7 e 77 12 65 — Lisboa

— **Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações**
R. S. Pedro de Alcantara, 1 — Tel. 32 46 93 e 21 32 56 — Lisboa — Luanda — Lourenço Marques — Beira.

— **Fundações Franki, Lda.**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 53 41 12.

— **Johann Keller**
R. dos Bem Lembrados - Cascais — Tel. 28 01 46

— **Sondagens e Fundações, A. Cavaco, Lda.**
R. Rodrigo da Fonseca, 62-r/c — Lisboa 1
Tel. 55 38 73 — 5 95 62 — 73 35 45.

— **Sondagens Ródio**
Rua de S. Bento, 644-3.º — Lisboa
Tel. 68 80 96/7/8

— **Sopecate**
R. do Arsenal, 146, 2. — Lisboa.
Tel. 3 40 10 - 32 02 08

IMPERMEABILIZAÇÃO

— **Empresa de Produtos Asfálticos**
R. Filipe Folque, 10-1.º — Lisboa — Tel. 73 01 56.

INSTRUMENTOS DE PRECISÃO

— **Wild Portugal, Ld.ª**
Praça das Águas Livres, 8, s/l 6 — Lisboa 2 — Tel. 68 11 27.

ISOLAMENTO TÉRMICO E ACÚSTICO

— **ISOLA**
Av. António Augusto de Aguiar, 17, 2.º e 3.º esq.
Tel. 53 71 91 — Lisboa.

— **SETH, Ld.ª**
R. Filipe Folque, 10-1.º — Lisboa — Tel. 73 01 56

— **Tesa — Beiersdorf Portuguesa S.A.R.L.**
Queluz

MOBILIÁRIO

— **Fábrica Portugal**
R. Febo Moniz

SONDAGENS

— **Construções Técnicas, Lda.**
Pr. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ld.ª**
Avenida da República, 42-8.º
Telef. 77 70 86/7 e 77 12 65 — Lisboa

— **Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações**
R. S. Pedro de Alcântara, 1 — Tel. 32 46 93 e 21 13 56 — Lisboa — Luanda — Lourenço Marques — Beira.

— **Fundações Franki, Lda.**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 53 41 12

— **Johann Keller**
R. dos Bem Lembrados - Cascais — Tel. 28 01 46

— **Sondagens e Fundações, A. Cavaco, Lda.**
R. Rodrigo da Fonseca, 62-r/c — Lisboa 1
Tel. 55 38 73 — 5 95 67 — 73 35 45.

— **Sondagens Ródio, Ld.ª**
Rua de S. Bento, 664-3.º — Lisboa
Tel. 68 80 96/7/8.

— **Sopecate**
R. do Arsenal, 146-2.º — Lisboa.

CONSTRUÇÕES METALO-MECANICAS

CONSTRUTORES METALO-MECÂNICOS

— **Construções Metalo-mecânicas MAGUE, Ld.ª** — Alverca

— **Jayme da Costa, Ld.ª**
R. dos Correeiros, 14 — Lisboa — Tel. 32 70 35.
Praça da Batalha, 12 — Porto — Tel. 2 28 12.
Cx. Postal 5174 — Luanda — Tel. 47 43.

— **LISNAVE**
Rocha do Conde de Óbidos — Lisboa

— **Sociedade Industrial Metalúrgica**
R. de S. Tiago, 1

REPARAÇÕES E CONSTRUÇÕES NAVAIS

LISNAVE
Rocha Conde de Óbidos — Lisboa

EQUIPAMENTO ELECTRICO

— **AEG — Lusitana de Electricidade**
R. João Saraiva, 4-Tel. 71 11 71/71 40 01-Lisboa.

— **ASEA**
Rua de Artilharia Um, 104-4.º Dt. — Lisboa — Tel. 68 90 17/8/9.
R. do Campo Alegre, 144, Porto — Tel. 6 21 06/9

— **Electrotécnicos Reunidos**
Avenida João XXI, 64 — Lisboa.

— **Jayme da Costa, Ld.ª**
R. dos Correeiros, 14 — Lisboa — Tel. 32 70 35
Praça da Batalha, 12 — Porto — Tel. 2 28 12.
Cx. Postal 5174 — Luanda — Tel. 47 43.

— **Siemens — Companhia de Electricidade**
Avenida Almirante Reis, 65
Telef. 53 69 21/0 — Lisboa

— **Soc. de Elec. Brown Boveri**
R. Sá da Bandeira, 481-2.º — Tel. 2 34 11 — Porto

— **Sociedade Michäelis de Vasconcelos, Ld. — Oerlikon**
Av. Marquês de Tomar, 94 — Lisboa.
P. da Liberdade, 114 — Porto.

— **União Eléctrica Portuguesa**
R. Alexandre Herculano, 244 — Porto.
R. Rosa Araújo, 35 — Lisboa.

BATERIAS

— **TUDOR — Soc. Port. de Acumuladores**
Av. Fontes Pereira de Melo, 12
Tel. 5 19 47 — Lisboa.

DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA

— **União Eléctrica Portuguesa**
R. Alexandre Herculano, 244 — Porto.
R. Rosa Araújo, 35 — Lisboa.

ELÉCTRODOS

— **Electro-Arco, Ld.ª**
R. Silva Carvalho, 239 — Lisboa — Tel. 68 36 49.
R. do Bolhão, 216 — Porto — Tel. 2 12 77.

INSTALAÇÕES

— **Isolux, Lda.**
R. Gonçalves Crespo, 33, 3.º — Lisboa
R. de Sá da Bandeira, 551, 4.º — Porto.

— **Jayme da Costa, Ld.ª**
R. dos Correeiros, 14 — Lisboa — Tel. 32 70 35.
Praça da Batalha, 12 — Porto — Tel. 2 28 12.
Cx. Postal 5174 — Luanda — Tel. 47 43.

— **SIEMENS — Companhia de Electricidade**
Av. Almirante Reis, 65—Tel. 53 69 21/0—Lisboa

ISOLAMENTOS

— **Empresa Electro-Cerâmica, S.A.R.L.**
L. Barão de Quintela.

SOLDADURAS

— **Electro Arco**
R. Silva Carvalho, 239 — Lisboa
R. do Bolhão, 216 — Porto

TELECOMUNICAÇÕES

— **AEG Lusitana de Electricidade**
R. João Saraiva, 4—Tel. 71 11 71/71 40 10-Lisboa

— **Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos, S.A.R.L.**
R. Rodrigo da Fonseca, 110, r/c — Lisboa — Tel. 68 60 72.
R. Sá da Bandeira, 766-1.° E — Porto — Tel. 2 48 18

EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

— **ALBA — Fábricas Metalúrgicas**
Albergaria-a-Velha — Tel. 5 22 06/7

— **DEMAG — Soc. Comercial Romar**
Trav. da Galé, 9 — Tel. 63 56 70 — Lisboa.
Santa Iria de Azoia

— **HIDREL**
Rua do Alecrim, 47-A e B
Telef. 32 57 00 e 35 966 — Lisboa

— **S. T. E. T.—Soc. Técnica de Equipamentos e Tratores, S. A. R. L.**
Prior Velho—Sacavem—Tel. 2510001/4.

BOMBAS

— **CIDEX — Comércio Internacional e Representações Industriais**
Av. Casal Ribeiro, 46-2.°-Tel. 73 53 07-Lisboa 1

CORRENTES

— **Harker Sumner**
L. do Corpo Santo, 18
Tel. 32 48 23 — Lisboa.

— **Auto - Lusitania**
Av. da Liberdade, 73 - 79 — Lisboa.

— **Harker Summer**
L. Corpo Santo, 18 — Tel. 32 48 23 — Lisboa.

MÁQUINAS-FERRAMENTAS

— **Soc. Portuguesa de Válvulas**
R. Academia de Ciências, 5 — Lisboa.
Tel. 3 17 10.

INDÚSTRIAS QUÍMICAS

FELTROS

— **FANAFEL — Fábrica Nacional de Feltros Industriais**
Estrada de S. João — Ovar

TÊXTEIS

— **FANAFEL — Fábrica Nacional de Feltros Industriais, Ld.ª**
Estrada de S. João — Ovar.

LIVROS TECNICOS

—**TECNICA**
Avenida Rovisco Pais — Lisboa
Tel. 77 54 49

MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO

AÇOS ESPECIAIS

— **A. Johnson & C.ª (Portugal), Ld.ª**
P. José Fontana, 11-1.° — Lisboa — Tel. 53 70 15/ /6/7/8.
R. Dr. António Granjo, 160/168-Porto-Tel. 5 46 69

— **ALBA — Fábricas Metalúrgicas**
Albergaria-a-Velha
Telef. 5 22 06/7

— **Companhia Portuguesa de Trefilaria**
R. do Instituto Industrial, 18-1.°, Dt.° — Lisboa
Tel. 67 12 24/5.

— **DEVA — Senna, Botto & Leitão, Ld.ª**
Rua Nova do Almada, 14
Telef. 34 572 — Lisboa

— **Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos**
L. S. Carlos, 4-2.°

— **Heliaço**
R. S. Julião, 41-4.° — Tel. 36 78 17 — Lisboa.

BETÃO

— **Companhia Portuguesa de Trefilaria**
R. do Instituto Industrial, 18-1.°, Dt.° — Lisboa
Tel. 67 12 24/5.
Lisboa 1

— **Empresa Cimentos de Leiria**
R. Braamcamp, 7 — Lisboa. — Tel. 5 91 61/66.

— **Heliaço**
R. S. Julião, 41-4.° — Tel. 36 78 17 — Lisboa.

— **Sociedade Portuguesa CAVAN**
R. de D. Estefânia, 94-A — Lisboa — Tel. 4 78 12 e 5 01 29.

CIMENTOS

— **CIBRA — Cimentos Brancos**
Tv. do Corpo Santo, 15 — Lisboa — Tel. 32 04 64.
R. do Bonjardim, 205 — Porto — Tel. 2 57 79.

— **Empresa de Cimentos de Leiria**
R. Braamcamp, 7 — Lisboa — Tel. 5 91 61/66.

— **Secil**
R. do Comércio, 156—Lisboa 2 —Tel. 32 82 01/2/3

MATERIAIS REFRACTÁRIOS

— **CERVAL — Cerâmica de Vale de Lobos, Ld.ª**
Av. Joaquim António de Aguiar, 41-5.º D.
Tel. 53 11 38 — Lisboa.

ARTIGOS DE ESCRITÓRIO

— **J. J. Silva & Irmão, Lda.**
Rua Silva Carvalho, 232-B — Lisboa
Tel. 65 27 50 / 68 06 71

— **Rotring — Representante Artur Westheimer**
Lisboa.

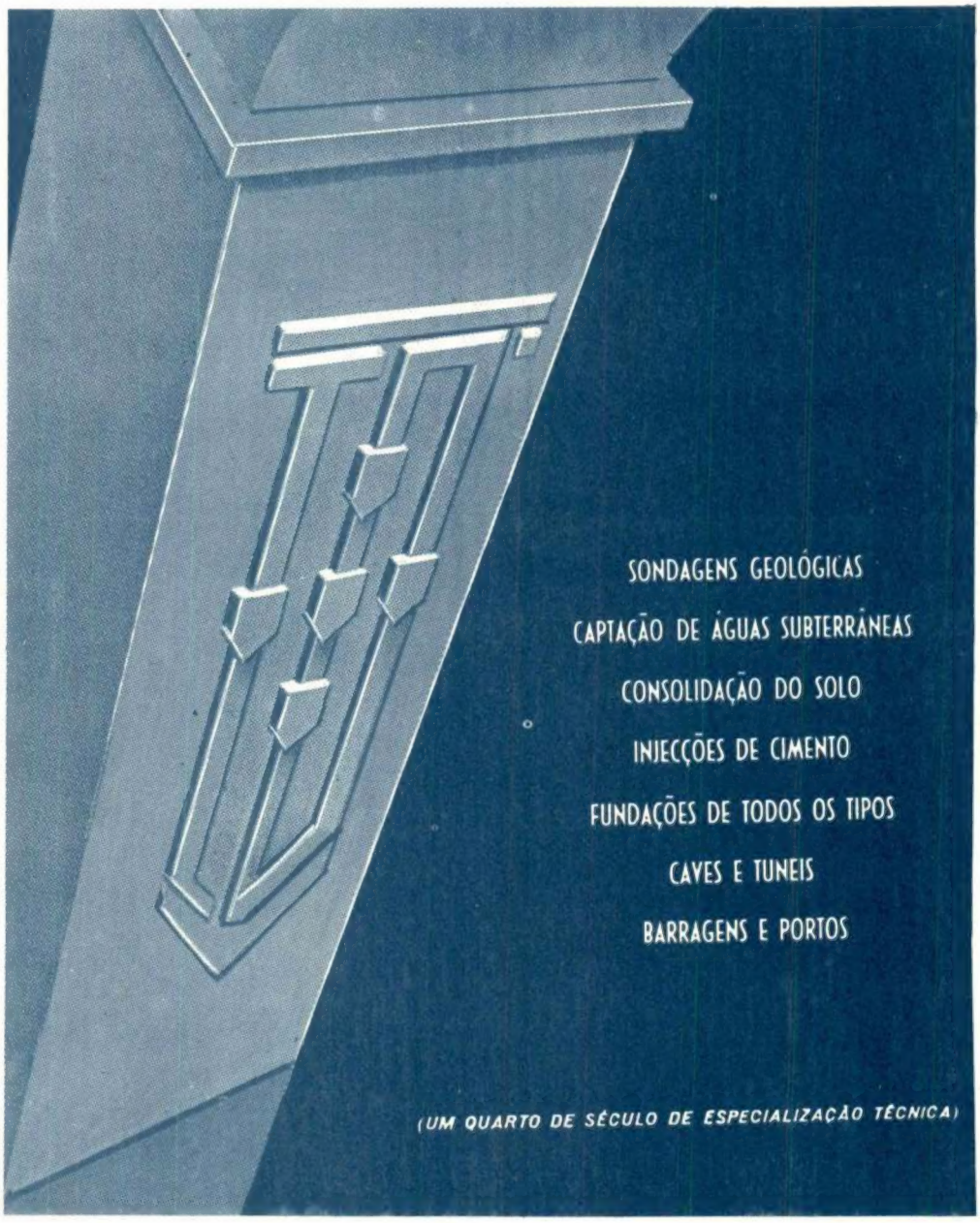
— **TESA — Beiersdorf Portuguesa S.A.R.L.**
Queluz

Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, L.DA

AV. DA REPÚBLICA, 42, 8.º
TELEFS. 77 70 86/7 e 77 12 65

LISBOA

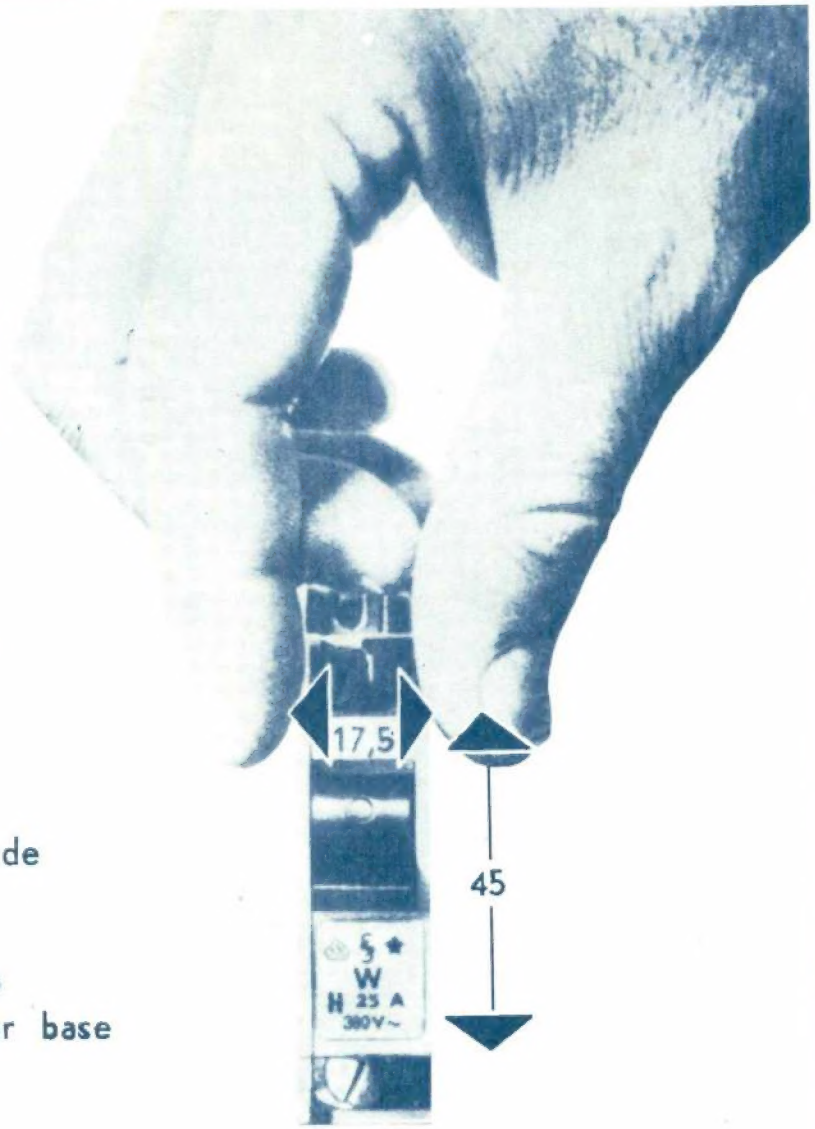


SIEMENS

Novo Disjuntor

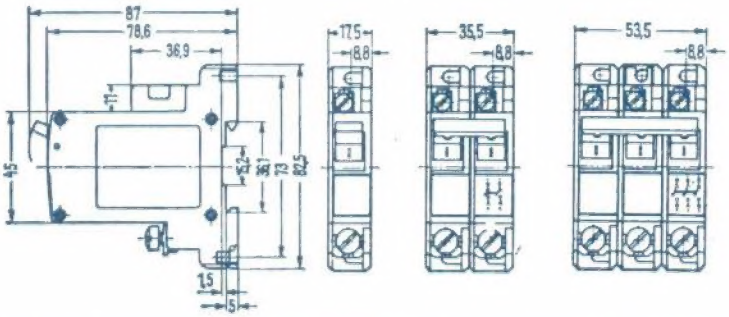
SUPERESTREITO TIPO W

- Apenas 17,5 m/m de largura
- Grande capacidade de manobra
- Indicação clara da posição de serviço
- Fixação de mola ou fixação convencional sobre qualquer base
- Montagem rápida



EI/V 1 67 006

DIMENSÕES EM MILÍMETROS



As dimensões reduzidas que correspondem exactamente a este disjuntor, permitem combinações e ligações práticas, seguras e económicas para inúmeros sistemas de comando e protecção.

Peça catálogos ou esclarecimentos à secção Técnica da

SIEMENS-COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S.A.R.L.

LISBOA-1 — AV. ALMIRANTE REIS, 65 — TEL. 53 69 21/0 • PORTO — RUA DAS CARMELITAS, 26 - 2.º — TEL. 2 89 43/7